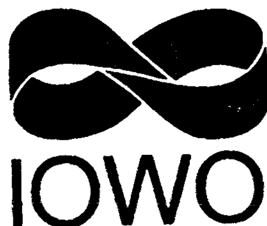


Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren van Liwenagel en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

47e jaargang
1971/1972
no 7/8
maart/april

Wolters-Noordhoff



EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te **Voorburg.**

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 15,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

I.O.W.O.

(Instituut voor Ontwikkeling van Wiskunde Onderwijs)

ter gelegenheid van de
officiële opening

met medewerking van de gehele staf

IOWO-nummer

Dit dubbel-nummer van EUCLIDES is volledig samengesteld door het team dat samenwerkt in het Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde-Onderwijs.
Met genoegen heeft de redactie het februari- en maartnummer voor dit doel beschikbaar gesteld. Het IOWO is een unieke instelling. Wat het doet en hoe het werkt kan niet in een enkel artikel worden uiteengezet. Het IOWO-team vroeg om ruimte, we vonden dat het daar recht op had.
In een der bijdragen wordt gewezen op de bijzondere rol die in Nederland is gespeeld door de Wiskunde Werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding. Misschien zijn de plannen om tot opheffing van deze werkgroep te komen (deze zou opgenomen worden in de Nederlandse Vereniging van Wiskunde-leraren) onvermijdelijk, misschien is door de instelling van het IOWO de wiskundewerkgroep overbodig geworden, misschien behoren de 'revolutionairen' van toen tot het 'establishment' van nu, maar zonder deze revolutionaire geest mag het IOWO eigenlijk niet functioneren. Uit dit dubbelnummer moge blijken dat het in ieder geval in het IOWO niet aan frisse, vernieuwde gedachten ontbreekt. Als nu maar niet iedereen alles voor kennisgeving aanneemt en dit nummer kritiekloos doorneemt, als er maar wordt meegedacht en gediscussieerd, dan pas krijgt het IOWO de gelegenheid te functioneren als een soort van voortzetting van de Wiskunde Werkgroep.

G. Krooshof

INHOUD

1 Bij de instelling van het IOWO

'......

De opdracht aan deze Commissie, die de naam zal dragen van 'Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde', is zeer ruim: zij zal datgene in studie kunnen nemen, dat zij nodig acht voor de modernisering van het wiskunde-onderwijs.....',
sprak in 1961 de toenmalige staatssecretaris drs. G.C. Stubenrouch tijdens de installatie van de CMLW.

Hij zal niet vermoed hebben wat hij zich op de hals haalde.
Immers, reeds in 1964 legde de CMLW in een interimrapport het dringend advies neer, dat een professioneel instituut ingesteld diende te worden voor de permanente aktiviteiten die de Commissie voorzag t.a.v. de modernisering van het wiskunde-onderwijs.
En daarmee begon een jarenlang touwtrekken 'ja-instituut, nee-instituut' tussen CMLW en departement.
Rapporten en audiënties volgden elkaar op met de regelmaat van een (overigens zeldzaam langzaam tikkende) klok.
Tijdens dat touwtrekken breidden de werkzaamheden van de Commissie zich echter dermate snel uit, dat het touw ergens wel moest breken.
Dat gebeurde in juni 1970 met het projekt Wiskobas, dat in de modernisering van het wiskunde-onderwijs op de basisschool voorzag: 'Wiskobas werd Wiskobasta', zoals het heette.
Als gevolg daarvan raakten de onderhandelingen met het departement in een stroomversnelling en zie daar:
per 26 januari 1971 werd door staatssecretaris Mr. J.H. Grosheide toestemming gegeven voor de instelling van het IOWO......!

Een jaar later:

het instituut is er sedert 1 augustus; binnenkort wordt het officieel geopend. De plannen van het IOWO zijn ambitieuzer dan ooit; de medewerkers enthousiaster dan ooit; de verwachtingen hoopvoller dan ooit.

Tot over 10 jaar......!

2 Ter inleiding

2.1 Wiskundeonderwijs-kunde — van vrijtijdsbesteding naar professie

Over wiskunde-onderwijs is er uiteraard nagedacht, zolang als er wiskunde wordt onderwezen. Zijn gedachten hieromtrent zo systematisch ordenen, dat men ze aan anderen - hetzij mondeling, hetzij schriftelijk - kan uitleggen, is al een volgende stap. Nog een stap verder, of men organiseert congressen, sticht tijdschriften en publiceert boeken aan de didactiek van de wiskunde gewijd. Voor de eerste wereldoorlog heeft Nederland wiskundeonderwijs-kundig, naar het schijnt, op Duitsland geteerd - ik ken tenminste geen Nederlands boek van dit soort uit die tijd (rekendidactieken daargelaten). Wel was er het onderwijskundig getinte Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, dat zich sinds 1924 in zijn 'Bijvoegsel gewijd aan Onderwijsbelangen' meer speciaal op de didactiek ging toeleggen. Met deel 4 (1927-1928) nam dit Bijvoegsel de naam aan: Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte vakken. Hoofdschotel bleef echter: didactiek der wiskunde met geschiedenis der wiskunde als dessert.
In 1924 gaf Wolters een geschrift van Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa uit: 'Wat kan en moet het wiskunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven?' Heeft dit geschrift de stoot gegeven tot het ontstaan van Bijvoegsel-Euclides? Op de eerste bladzijde van Nummer 1 stelt Dijksterhuis de benauwde vraag 'Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?' en onder dezelfde titel laat Tatiana Ehrenfest een beslist 'ja' horen.
'Over de maatschappelijke waarde van het wiskundeonderwijs' is de titel in deel 3 van D. van Dantzigs scherpe kritiek op het dogmatisme van het wiskundeonderwijs, de - op vele punten verdienstelijke - plannen van de Commissie Beth-Dijksterhuis incluis. Euclides is ook het forum om fysici aan de kaak te stellen die de mechanica zouden willen inpalmen. De leraarsopleiding is herhaaldelijk aan de orde; de universiteiten zijn er tegen - niet geheel ten onrechte - zou men nu zeggen, als men ziet wat de voorstanders zich onder leraarsopleiding voorstellen. Tenslotte komt ze er toch: de victorie begint in Utrecht, waar Minnaert als privé-liefhebberij een leraarsopleiding beoefent; na de oorlog worden deze activiteiten door een K.B. gewettigd.
Al bestreed hij haar, toch was Dijksterhuis een der weinigen die Tatiana Ehrenfest au sérieux namen, zo ernstig zelfs dat hem de schrik om 't hart sloeg bij de gedachte aan een meetkunde-onderwijs, waarin men de gelijkheid der basishoeken van een gelijkbenige driehoek niet zou bewijzen of dat men met de ruimte zou beginnen. Ook was er een kleine groep jonge leraren, verenigd in de Wiskunde-Werkgroep (van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs) die te haren huize in Leiden sinds 1936 bijeen

plachten te komen voor didaktische verkenningen onder haar leiding. Tot die groep behoorden ook de Van Hieles. In 1935 verscheen Tatiana Ehrenfest onvolprezen en nog steeds niet verouderde *Übungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse.*
Aan de universiteiten kreeg de vakdidactiek pas een kans toen didactiekdocenten in de wetenschappelijke staven werden opgenomen. De eerste vakdidacticus van professie in den lande was de docent van de wiskunde-didactiek in Utrecht, in 1947 benoemd. Er kwamen, allereerst in Utrecht dankzij de initiatieven van Minnaert en Langeveld, instituten voor de leraarsopleiding, tevens plaatsen van onderwijskundig onderzoek. Een klein aantal onderwijskundige proefschriften getuigden van de groeiende belangstelling der universiteiten.
De wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. uitte zich na 1945 steeds duidelijker waarneembaar in maandelijkse bijeenkomsten, jaarlijkse weekendconferenties en publikaties. Haar invloed was voelbaar in de Leerplanherziening van 1958. H.Freudenthal heeft getuigd dat voor hem persoonlijk de Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. de Hogeschool van de wiskundeonderwijs-kunde is geweest.
In 1961 werd door de Minister O.K. & W. de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde ingesteld, die zich, anticiperend op een moderne interpretatie van leerplanontwikkeling, vooral actief betoonde in de heroriëntering van de wiskunde-leraren. Geleidelijk groeide een administratief apparaat en op den duur kwamen er ook enkele los-vaste-wetenschappelijke medewerkers, maar reeds eerder was duidelijk geworden, dat de grote toewijding van alle vrijwillige medewerkers bij elkaar nimmer een voldoende basis zou zijn om een groots werk van leerplan-ontwikkeling als liefhebberij voort te zetten. Herhaalde pogingen, om de overheid hiervan te overtuigen, faalden en steeds serieuzer werd met de gedachte gespeeld het werk neer te leggen.
Wiskunde op de basisschool was op zijn minst al sinds 1965 een onderwerp van discussie in de CMLW geweest. Het bleef echter bij het discussiëren - het was immer duidelijk dat aan een taak van dergelijke afmetingen zonder een professionele staf niet kon worden begonnen. Desniettemin, in 1968, werd de sprong in 't duister gewaagd - niet door de CMLW als zodanig, maar door een groepje vaste en losse medewerkers van de CMLW met nog andere belangstellenden. 'Wiskobas' werd het avontuur gedoopt: een weloverwogen groots plan, inspiratie voor een grote groep, en spoedig een begrip in opvoedkundig Nederland. Alleen een gebrek kleefde Wiskobas aan: het was niet meer als liefhebberij en vrijetijdsbesteding te verwezelijken.

In januari 1971 werd de professionalisering van de leerplanontwikkeling in de wiskunde een feit: het IOWO kwam tot stand. Is het een instituut voor wiskundeonderwijs-*kunde*? Neen, het is keiharde praktijk wat daar beoefend wordt, wiskundeonderwijs-*kunst*, echter, naar ik weet, niet zonder kunde beoefend, en naar ik hoop, met veel kunde als opbrengst. Niet het denkwerk van enkelingen, maar het doewerk van een krachtig collectief.

2.2 **Leerplanontwikkeling als service**

2.2.1 Inleiding

In het huidige drukke onderwijsverkeer is het niet eenvoudig om het onderwijsvehikel gaande te houden. Vooral in de zestiger jaren zijn de leerstofveranderingen revolutionair van aard geweest. Het werk van de CMLW heeft zich gedurende de zestiger jaren vooral gericht op de bijscholing van de docenten en op de omschrijving van leerstofprogramma's. Kortom, de dienstverlening bestond uit bijtanken en ramen wassen.

Allengs werd echter steeds duidelijker, dat een grondiger service in de toekomst onontbeerlijk zou zijn: in de twee-eenheid wiskunde-onderwijs was de onderwijskundige kant van de vernieuwing niet genoeg verzorgd. Taken die binnen het wiskundeonderwijs van de basisschool en het beroepsonderwijs aan de CMLW opgedragen werden, vereisten met noodzaak een meer professionele aanpak. Met name in de Verenigde Staten werden de gevolgen van een te eenzijdig leerstofgerichte vernieuwing zichtbaar: leiders van belangrijke leerplanprojecten (zoals het Madison Project en het Illinois Project) maakten hun twijfels over de verbetering kenbaar.

Hoe moest een bundeling van de vernieuwingskrachten in Nederland plaats vinden?
Welke instantie zou de leerplanontwikkeling verzorgen?
Hoe moest de heroriëntering verzorgd worden?

Vanuit de CMLW liet een werkgroep — Wiskobas genaamd — er geen twijfel over bestaan, dat er een chaos dreigde binnen het rekenonderwijs op de basisschool met de invoering van moderne wiskunde-methoden. Er was geen organisatie beschikbaar, die de leerplanontwikkeling en de heroriëntering voor z'n rekening zou kunnen nemen. Binnen de CMLW zou er wel het een en ander kunnen gebeuren, maar het zou lapwerk blijven.
Binnen een organisatie van amateurs (lees: liefhebbers) kon een onderdeel, dat alleen het basisonderwijs voor z'n rekening zou nemen, geen professionele resultaten opleveren.
Ook binnen het uitgebreide gebied van het beroepsonderwijs waren soortgelijke ontwikkelingen aan de gang.

Welnu, in januari 1971 leidden besprekingen met het departement tot de oprichting van het IOWO, het instituut, waarover vrijwel vanaf de oprichting van de CMLW besprekingen waren gevoerd.
De taken van dit instituut werden alsvolgt geformuleerd:
a voortzetting van de activiteiten die door de CMLW waren aangepakt en reageren op de actuele ontwikkelingen in het onderwijs,
b leerplanontwikkeling van het wiskundeonderwijs in samenwerking met alle instanties, die mede hun aandeel daarin (kunnen) leveren, gevoed door interne en externe kadervorming.

Wat moet een dergelijk service-station meer bieden dan alleen bijtanken en ramen wassen?

2.2.2 Leerplan

De omschrijving voor een leerstofprogramma in algemene termen — zoals we in vele westeuropese landen aantreffen — wordt als volstrekt onvoldoende ervaren om vernieuwd wiskundeonderwijs vanaf de basis(school) te laten groeien. Duidelijk is geworden, dat de afdalende beweging (universiteit → vernieuwing voortgezet onderwijs → vernieuwing basisonderwijs) een grote leerstofwolk heeft doen opwaaien, die een duidelijk zicht op de didaktische vernieuwing verduisterde.
Vanuit het IOWO willen we een opklimmende beweging in gang zetten en daartoe beginnen bij het basisonderwijs (of zo mogelijk het kleuteronderwijs). Er zijn een aantal noodzakelijke voorwaarden — heroriëntering van onderwijzers; de vernieuwing van de rekendidactiek op de pedagogische academie; de vorming van een kader van docenten, die de opleiding en begeleiding kan verzorgen; de mogelijkheden van begeleiding — waarover we op dit moment verder willen zwijgen, omdat we in voorgaande artikelen van dit tijdschrift hieraan reeds aandacht besteed hebben.
Laten we ons beperken tot het begrip 'leerplan'.
Het leerplan, dat we voor 5 — 11 jarigen gaan ontwikkelen als onderdeel van een leerplan van 5 — 18 jarigen, zal een inspiratie-bron moeten zijn voor de onderwijspraktijk.

1 Het zal een inhoudelijke en pedagogisch didaktische analyse van de leerstof bevatten, met uitwerking van details waar dit nodig is.
2 Het zal fundamentele wiskundige beschouwingen bevatten. Een vraag als bijvoorbeeld 'Wat is meten als wiskundig activiteit?' zal beantwoord moeten worden en begrijpelijk gesteld voor de aanstaande onderwijzer.
3 In het leerplan zullen ook fundamenteel onderwijskundige beschouwingen staan.
  Gegevens uit de leerpsychologie en de ontwikkelingspsychologie zullen — in betrekkelijk eenvoudige bewoordingen — weergegeven moeten worden.
  Zowel de wiskundige als de onderwijskundige beschouwingen zullen een grote invloed hebben op leerstofkeuze en -ontwerp.
4 In het leerplan zal kort beschreven worden, hoe een bepaald onderwerp in andere landen aangepakt is en er zal commentaar gegeven worden vanuit de bijdragen 1 en 2.
  Dit deel van het leerplan noemen we de historisch-geografische verkenning.
  Naast de drie genoemde delen is er een hoofdstuk over de doelstellingen voor het wiskundeonderwijs en de motivering van de leerstofkeuze.

Dit leerplan noemen we het *onderwijsleerplan:* het is de bron, waaruit we putten als we leerlingenmateriaal ontwerpen en omgekeerd wordt het door het werken met kinderen in de onderwijspraktijk verder aangevuld met belangrijke gegevens.

De ontwikkeling van een dergelijk onderwijsleerplan als bron is één van de belangrijkste taken van het IOWO op lange termijn.
We willen echter beklemtonen, dat het werken aan de ontwikkeling van zo'n plan, zoals dat mede geïnspireerd wordt vanuit de heroriënteringscursus, een belangrijk element van het leerplan-ontwikkelingsproces is. Het feit nu, dat binnen het Wiskobasproject een grote groep mensen — wiskundigen, onderwijskundigen, praktici — aan de realisering werken, bepaalt mede de waarde van het 'eindprodukt'.
Naast het onderwijsleerplan als bron is er het *schoolwerkplan.*
Een schoolwerkplan biedt al een verregaande concretisering van de onderwijsfilosofie, zoals die in het onderwijsleerplan is neergelegd, maar er is nog ruimte voor een keuze. De leerstofblokken voor de P.A., zoals die nu ontwikkeld worden binnen Wiskobas, bieden een goed voorbeeld van wat een schoolwerkplan is. Er zullen 20 blokken aangeboden worden, waaruit de leraar met de studenten een keuze kan maken. Reeds nu is het bekend, dat de realisering ervan geheel verschillend gebeurt.
Het schoolwerkplan is maximaal en beschrijvend, d.w.z. het biedt een 'te veel', het is een reservoir, waaruit men kan putten, een magazijn, waaruit men de leerstofpakketten kan halen.
Tot nu toe zijn er vijf blokken in experimentele versie klaar.
In totaal levert dat 700 bladzijden aan leerlingentekst op, waaronder beschouwingen, opdrachten voor onderzoek, vraagstukken, toetsen, enz. De leraar zal met deze blokken moeten leren werken en er zelf het minimale en voorschrijvende gedeelte uit moeten halen.
We zijn dan toe aan het *onderwijsleerpakket* voor de onderwijspraktijk.

- Een onderwijsleerplan bevat dus fundamentele zaken: doelstellingen, motiveringen, fundamenteel wiskundige bijdragen (wat is dit stuk wiskunde in wezen als menselijke aktiviteit), onderzoekgegevens uit de psychologie, didactische beschouwingen, voorbeelden voor de lespraktijk.
- Een schoolwerkplan is een ruime uitwerking van het onderwijsleerplan. Het bevat leerlingenmateriaal, maar is nog geen leergang, omdat er alternatieven gegeven worden.
- Een onderwijsleerpakket bevat het geheel aan instructie en leermiddelen, leerlingenteksten, toetsen, kortom al hetgeen in de onderwijspraktijk gebruikt wordt.

Nog enkele opmerkingen bij deze driedeling:

1 In het COLO-rapport wordt het onderwijsleerplan niet in een dergelijke inhoudelijke zin opgevat. Wij menen dat deze inhoudelijke toevoeging wel noodzakelijk is.

2 Het mag lijken alsof er in het bovenstaande van een afleiding sprake is; eerst het onderwijsleerplan, dan het schoolwerkplan, enz.
Zo is dit echter niet bedoeld. Wij menen, dat op alle drie gebieden tegelijk gewerkt moet worden, omdat ze door en met elkaar ontwikkeld worden en betekenis krijgen.

3 Er is naast de genoemde elementen in de grote hal van de leer-

planontwikkeling ook nog een hoekje, waar de ontwerper mag spelen, waar hij allerlei dingen 'gissend en missend' bij de kop neemt om te onderzoeken, om te kijken hoe 't gaat, om een leergang te maken 'op het gevoel af'. Met andere woorden, naast de bron (onderwijsleerplan), het magazijn (het schoolwerkplan) en het leerstofpakket (voor de leergang) is er ook nog ruimte over voor het rommelhoekje.

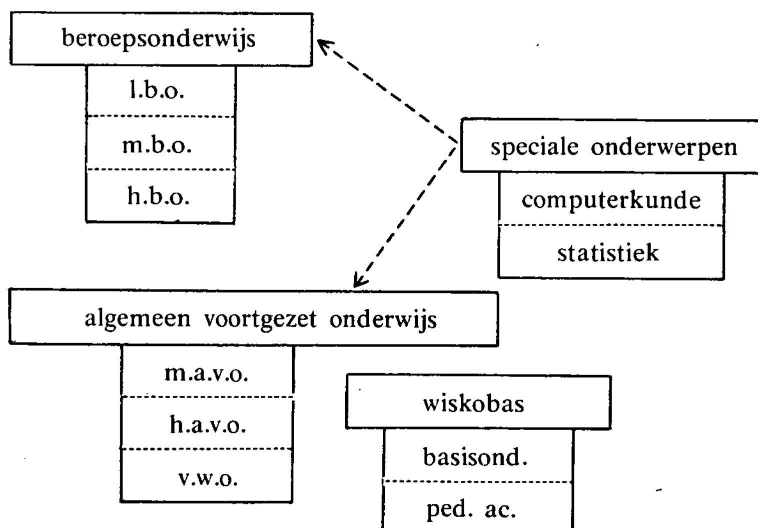
4 Uit de aanpak van het Wiskobasproject is ook duidelijk, dat er grote aandacht besteed wordt aan de wijze, waarop de vernieuwing ingang vindt in de alledaagse schoolpraktijk (innovatieplan).

In Hoofdstuk 3 van deze bijdrage wordt geschetst hoe de werkzaamheden voor 5-11 jarigen hun schaduw vooruit werpen op het vervolg, 12-18 jarigen (de opklimmende beweging!).

2.2.3 Besluit

De taak van het IOWO bestaat uit de ontwikkeling van een onderwijsleerplan voor 5-18 jarigen en voor sommige opleidingen (zoals de pedagogische academie) de ontwikkeling van een schoolwerkplan. Zoals uit het voorgaande duidelijk geworden is zal het instituut zich ook op de niveaus van het schoolwerkplan en de concrete leerstofpakketten bewegen, voor zover dat nodig is om een zo goed mogelijk onderwijsleerplan te ontwerpen (en dat is dus niet zoiets als het ontwerpen van een methode).
Daarnaast zijn er allerlei activiteiten — en die vullen nu het grootste deel van de werktijd — die een voortzetting betekenen van 'bijtanken' en 'ramen wassen'.

Er zijn op dit moment binnen het IOWO de volgende activiteitsvelden:



Helaas zijn de werkzaamheden in deze gebieden zo omvangrijk dat we slechts met veel moeite toekomen aan de geschetste fundamentele zaken.
Zo is de bijdrage Toevalligheden (zie 3) avondwerk geweest, terwijl een voortzetting ervan in feite dagwerk zou moeten zijn. We noemen u deze moeilijkheid, opdat duidelijk blijkt, dat de ontwikkeling van de fundamentele zaken plaats vinden in het spanningsveld van de lopende zaken.

We hebben in dit artikel geen aandacht geschonken aan de kadervorming, d.w.z. de vorming van een grote groep deskundigen voor de opleiding en begeleiding. Ook is er gezwegen over het aspect van de samenwerking met onderzoeksinstituten, toetscentra, begeleidingsinstanties, e.a. Een planning van de werkzaamheden is eveneens achterwege gelaten.
Over één belangrijk punt mogen we echter niet zwijgen en dit betreft de onrust in het onderwijsveld, die we signaleerden aan het eind van de zestiger jaren. Welnu, bij al onze werkzaamheden aan de basis hebben we steeds het advies gegeven: handhaaf je traditionele rekenboek en probeer - voorlopig - de nieuwe elementen in je onderwijs te integreren. We zullen zeker enkele jaren nodig hebben om met elkaar te bepalen wat wenselijk en mogelijk is. Didactisch gezien zijn we voor een revolutionaire aanpak, leerstofinhoudelijk bekeken gaan we evolutionair te werk.

Voor het algemeen voortgezet onderwijs en het beroepsonderwijs liggen de zaken per geval anders. Zo is bijvoorbeeld het onderwijs aan de pedagogische academie (beroepsopleiding) in zowel didactisch als leerstofinhoudelijk opzicht sterk in beweging. Zoals echter gezegd, voor het basisonderwijs spreken we vooralsnog - ondanks de term Wiskobas - van een verlevendiging van het huidige rekenonderwijs.

Tot besluit verwijzen we naar de 'toevalligheden', die een verslag vormen van de nulde fase in een stukje leerplanontwikkeling.
Ook deze blik in een stukje leerplanontwikkeling leveren we graag als service van de zaak.

2.3 Nadenken over het begin

Wiskunde is een produkt van de menselijke geest, de neerslag van het denkwerk van vele 'groten van geest' door de eeuwen heen. Nog steeds en telkens weer blijkt het menselijk vernuft hieraan nieuwe inzichten te kunnen toevoegen. Het geheel van begrippen, relaties, regels en wetten is geordend in abstracte wiskundige structuren. De afstand hiervan tot de werkelijkheid van alle dag lijkt soms onafzienbaar.

Onder vóóronderstelling van de aanwezigheid van bepaalde vaardigheden in het redeneren, van een zeker begrippenapparaat en van enige technieken zou men kunnen denken dat het wiskundeonderwijs zich beperkt tot een

inleiding in de bovengenoemde abstracte structuren. De taak van de leraar bestaat dan alleen uit het overdragen van het kant-en-klaar-prefabricated-'leerstofpakket' naar de geest van zijn leerlingen. Modern wiskundeonderwijs zou zich in deze zin richten op gebieden als de verzamelingsleer, de lineaire algebra, de informatica, de graph-theorie, de topologie, e.d. Het begin van een dergelijk wiskundeonderwijs - bedoeld voor potentieel-grote-geesten - zou men dan omstreeks het 15e jaar kunnen plaatsen.
De gedachten echter, dat wiskundeonderwijs meer is dan de confrontatie van een — in principe — selecte groep mensen met panklare abstracte structuren, is zo oud als het wiskundeonderwijs zelf. Dit 'meer' bestaat dan in een onderwijsaanpak, waarbij wiskunde als een proces, een activiteit van de menselijke geest gezien wordt. Tussen deze twee uitersten — aanbieden van het kant- en-klare eindprodukt en het stimuleren van de activiteit van de leerling om een gebied te mathematiseren — bewoog zich de onderwijsaanpak door de jaren heen.
Met name in het meetkundeonderwijs weerspiegelde zich het balanceren tussen genoemde extremen.
Ook de reacties van de huidige leraren in het a.v.o. met betrekking tot een andere aanpak van het wiskundeonderwijs, mede gestimuleerd door de gebruikte leerboeken, getuigen hiervan. In beide gevallen moeten we constateren dat de meningen verdeeld zijn. De principiële discussie over de doelstellingen van het wiskundeonderwijs is hiermee echter op gang gekomen. Tegelijkertijd echter is voor de leraren een vervelende onzekerheid t.a.v. het nut van hun inspanningen opgeroepen. Voor de pragmatici onder hen is de afstand tussen de leerstof en de wereld van de leerlingen zorgwekkend. De complementaire groep leraren maakt zich al even grote zorgen over het gebrek aan mathematische zuiverheid in sommige onderwijs-leersituaties van nu.

De verwachtingen van de leraren uit beide groepen ten aanzien van hun wiskundeonderwijs stemmen echter in zekere mate overeen. Men wil de leerlingen belangrijke begrippen leren, ingebed in begripschema's, vanwaaruit redeneringen mogelijk gemaakt worden.
De te leren kennis en vaardigheden moeten leiden tot zeer wendbare handelingsstructuren die een optimaal bereik hebben. Het wiskundeonderwijs dient het vormen van een aanpakgedrag, waarin probleemanalyses en oplossingsstrategieën liggen opgeslagen.
Kortom, de wiskundeleraar tracht met behulp van een bepaalde leerstof en door middel van zijn wijze van overdracht een leerresultaat te bereiken, dat uitgaat boven het directe eindprodukt en reikt naar hogere gebieden binnen het vakgebied en zelfs daarbuiten.
De hoop, dat wiskundeonderwijs formele waarde heeft, leeft bij vele wiskundeleraren door alle tijden heen. In de vorige eeuw werd sterk de nadruk gelegd op 'het leren denken' door het beoefenen van wiskunde, in deze eeuw is de twijfel aan het effect van het wiskundeonderwijs in genoemde zin groter geworden.
De formuleringen werden genuanceerder en met name de afhankelijkheid van

de gebruikte onderwijs- en leermethode werd sterk beklemtoond in de discussies over de waarde van het wiskundeonderwijs.
Wij menen, dat na de stilte in de discussie over de doelstellingen van het wiskundeonderwijs gedurende de zestiger jaren, de tijd rijp is om in het zicht van het nieuwe wiskundeonderwijs opnieuw de vragen omtrent de waarde van het wiskundeonderwijs te formuleren. Vanuit het IOWO zullen we in dit opzicht zeker *nadenken over het begin.* We durven stellen dat de hoop op transfer een kernmerk is van elke gemotiveerde wiskundeleraar. Daarbij zal de meer pragmatisch ingestelde leraar in tegenstelling tot de anderen, deze transfer zien naar gebieden buiten de wiskunde zelf.
Zoals hiervoor reeds gesteld, spelen bij onze overdenkingen over het begin van wiskundeonderwijs, ook gegevens uit leer- en ontwikkelingspsychologie een rol. De vaste fasering van leerprocessen, waarin begrippen gevormd worden, is in verschillende onderzoekingen naar voren gekomen. Tevens kan men naast theorieën over de begripsvorming op het niveau van het materiële handelen, theorieën plaatsen van ontwikkelingspsychologische aard. Hierin komt naar voren dat kleuters in staat zijn om 'denkwerk' te verrichten vanuit concrete handelingssituaties. Leggen we bovengenoemde gegevens bij elkaar — transferabele kennis en vaardigheden, wendbare handelingsstructuren, begripsvorming vanaf een materieel handelingsniveau — dan lijkt het voor de hand te liggen om in de omgeving van het kind naar mogelijke wiskundige aspecten op zoek te gaan. In analogie met het taalonderwijs wordt dit ook wel geformuleerd als 'het plaatsen van het kind in een rijk gestructuurde wiskundeomgeving'.
Welnu, deze aspecten zijn er: de wereld van het kind biedt een rijkdom aan mogelijkheden in dit opzicht: vele activiteiten in het huidige kleuteronderwijs getuigen hiervan. Met deze aspecten echter, is de wiskundige structuur, waarin een en ander past en waardoor bepaalde accenten beter geplaatst kunnen worden, nog niet bepaald.

Ons wiskundeonderwijs begint aldus in de concrete wereld van de kleuters. Het uitgangspunt is veelal een probleem dat op aanschouwelijk niveau door de kinderen kan worden opgelost. Zowel de oplossing (eindprodukt) als de weg naar de oplossing (wiskundige activiteiten) zijn van belang. Langs dit trajekt van wiskundig handelen worden in een didaktische sekwentie begrippen, regels, wetmatigheden, technische vaardigheden e.d. afgezet. Vanuit het concrete materiaal worden de problemen zodanig 'geprogrammeerd', dat deze weg vaak via eigen ontdekkingen van het kind wordt afgelegd.
Deze manier van werken, gevoed vanuit een probleem-georiënteerde beginsituatie, vereist van de leerlingen een zeer intensieve eigen activiteit.
Hiernaast dient ook tijd besteed te worden aan het leren (memoriseren) van bruikbare parate kennis, vaardigheden en technieken. Kennis van hele leerstofgebieden en lokale deductieve structuren hierbinnen kan eveneens van incidenteel belang zijn.

Men kan zich nu afvragen of het huidige rekenonderwijs een plaats heeft in deze filosofie over het wiskundeonderwijs.

Na een accentverschuiving, zowel ten aanzien van de leerstof als van de werkwijze, zal het rekenonderwijs van nu een onderdeel van het wiskundeonderwijs van morgen kunnen - en moeten - zijn. Ter geruststelling willen we erop wijzen, dat één van de aspecten van wiskundeonderwijs het leren beheersen van technische vaardigheden is. Op elementair niveau zal dit ertoe leiden dat de kinderen ondermeer de rij der natuurlijke getallen, de tafels van vermenigvuldiging, enkele eigenschappen van breuken en de formule voor de oppervlakte van een driehoek tot hun parate kennisbezit moeten maken. Later leidt dit o.a. tot het memoriseren van regels van het differentiëren, de techniek van het schoonvegen van determinanten of het gebruiken van de ongelijkheid van Schwarz. De keuze van nieuwe leerstof voor het basisonderwijs zal tenminste vanuit de hiervoor impliciet aanwezige criteria moeten geschieden. De wiskunde biedt hiertoe een groot reservoir aan mogelijkheden. De huidige stand van zaken in de onderwijskunde doet ons het beste hopen omtrent de informatie, die van daaruit te verwachten valt. Samenwerking van wiskundigen, wiskunde-didactici, onderwijskundigen en mensen uit de (dagelijkse) praktijk van het onderwijs moet kunnen leiden tot een relevant modern wiskundeonderwijs voor leerlingen van 5-18 jaar.

Een voorbeeld van een voorzichtig begin kunt u vinden in hoofdstuk 3 van dit nummer, waarin onze filosofie een zeer voorlopige neerslag heeft gevonden onder de titel (met dubbele bodem): *Toevalligheden.*

3 Toevalligheden
— de nulde fase in een leerplanontwikkeling

Inleiding

Dit artikel is een neerslag van de gezamenlijke inspanningen van alle medewerkers van het IOWO. Gedurende de maanden oktober en november is in een achttal kadervormingsbijeenkomsten naast leerplantheoretische problemen ook de concretisering hiervan in het vak Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek aan de orde gesteld. Mede ten behoeve van deze uitgave van Euclides is vanuit een korte oriëntatieperiode een aantal bakens op het onderwijstraject voor leerlingen van 5-18 jaar uitgezet:

kwalitatief kansbegrip	(ca. 7 jaar)
een statistisch onderzoek	(ca. 9 jaar)
de toto	(ca. 11 jaar)
mathematische verwachting	(onderbouw a.v.o.)
een aanzet tot hypothesetoetsing	(bovenbouw-α en h.b.o.)
markovprocessen	(bovenbouw β)
wachttijden	(bovenbouw W – II)

Met deze werkwijze laten we openlijk onze sympathie blijken voor die vorm van onderwijs, die men zou kunnen karakteriseren met de term probleemgeoriënteerd wiskundeonderwijs. In elk baken wordt getracht de leerling vanuit het gestelde probleem te leiden in een bepaald wiskundig leerstofgebied; het leerproces wordt daarbij zo geleid dat men mag verwachten dat er mede een aanpakgedrag wordt ontwikkeld, dat ook op een breder vlak van toepassing kan zijn.

Deze reflectie van leerplanontwikkelingsactiviteiten laat er geen twijfel over bestaan dat de ontwikkeling geïnitieerd is vanuit de wiskunde zelf.
We hebben onze keus gedaan uit een overweldigend aanbod van leerstof en werkvormen; het vak statistiek en waarschijnlijkheidsrekening heeft wat dat betreft ongekende mogelijkheden.
Daarbij zijn we ons ervan bewust dat nog vele noodzakelijke activiteiten hier onvermeld moeten blijven.
Het zal de aandachtige lezer dan ook duidelijk zijn dat deze eerste bakens mede het karakter dragen van het gegist bestek.
Immers, niet alleen is getracht vulling te geven aan een stukje modern wiskundeonderwijs vanaf 6 à 7 jaar, dit geschiedde tevens aan de hand van een onderwerp — statistiek — waarmee ook de concrete ervaringen in het voortgezet onderwijs nihil mogen heten (op die in gymnasium -α na).

Naast deze inhoudelijke beperking stelt zich de ideële beperking om een (ver)nieuw(d)e aanpak te demonstreren in een schematische opzet, die de zo noodzakelijke praktische evaluatie mist.

Staat de lezer echter welwillend tegenover de intentie van het gebodene, dan verwachten wij dat hem iets zal blijken van de richting, waarin wij nu denken.

Aldus, nogmaals, een momentopname: niet meer dan een weldoordacht produkt uit

de nulde fase in een leerplanontwikkeling.

Kwalitiatief kansbegrip



1 Achtergrondinformatie

Er zijn diverse woorden in onze taal die uitdrukking geven aan het feit, dat iemand een bepaald toekomstig gebeuren van een zekere kans voorziet: 'Waarschijnlijk is de meester morgen ook nog ziek' of 'Je hebt grote kans dat Eddie Merckx dit jaar weer de Tour wint' of 'Het is heel goed mogelijk dat Jan morgen de tafel van zeven helemaal goed kan opzeggen'.
In vele gevallen wil de gebruiker van deze woorden alleen maar uitdrukken dat de genoemde gebeurtenis tot de mogelijkheden gerekend moet worden. Woorden als 'waarschijnlijk' en 'hoogstwaarschijnlijk' en 'misschien' geven daarbij slechts een intuïtief accent aan de geschatte kans, dat het gebeuren in werkelijkheid plaats zal vinden. De valuaties, die hiervoor in gebruik zijn, vormen zeker geen geordende verzameling.
Zelfs als een dergelijk woord in een zekere context wordt gebruikt, is een vergelijking met andere nog niet altijd mogelijk: 'de kans dat de meester morgen ziek is' (waarschijnlijk) is niet vergelijkbaar met 'de kans dat Eddie Merckx de Tour weer wint' (je hebt grote kans).
Dit soort overwegingen hebben ertoe geleid dat wij in de inleidende lessen deze woorden niet gebruiken. We beginnen daarom met het identificeren van gebeurtenissen in een bepaalde situatie, gaan dan over tot het onderscheiden van 'onmogelijke' en 'mogelijke' gebeurtenissen.
Hierna komen we tot 'mogelijke' gebeurtenissen, die dan weer naderhand van een zekere waarschijnlijkheid kunnen worden voorzien. Heel duidelijk speelt hier al het verschil tussen het empirische en het a priori-kansbegrip een rol.

Het zal blijken dat vooral in het eerstgenoemde geval moeilijkheden bij het klassificeren op gaan treden, daar de ervaringswerelden van de kinderen sterk kunnen verschillen.
Tenslotte merken we op dat we er met deze moeilijkheden van exact wiskundige aard nog niet zijn.
Daantje de Moor (6 jaar) liet ons dat nog even weten, toen hij motiveerde waarom hij vond dat er meer jongens dan meisjes geboren werden: 'wij moeten toch sterker zijn...'

2 Beginsituatie en doelstelling

Dit baken is gepland voor kinderen van ongeveer 7 jaar, die in de tweede klas

van de huidige basisschool zitten. De lessencyclus begint met een stilleesles van waaruit een aantal vragen in een klassegesprek aan de orde wordt gesteld. In het kader van dit artikel beperken we ons tot die aspecten van het klassegebeuren, die in relatie staan tot het onderwerp. Het is in verband hiermee wellicht de moeite waard om onze bedoelingen (doelstellingen) vooraf te expliciteren:

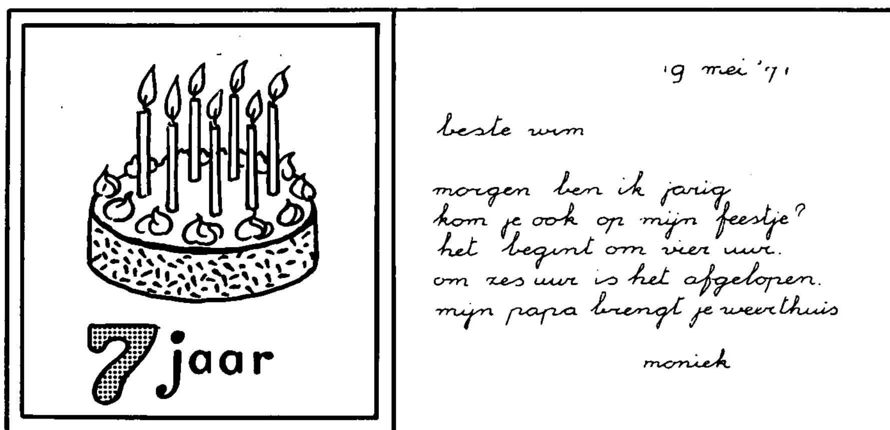
- De kinderen moeten aan het eind van deze lessencyclus in staat zijn om gebeurtenissen, hetzij vanuit de eigen ervaring (empirische kans), hetzij met betrekking tot een vaststaande uitkomstenverzameling (a priori-kans), te kwalificeren naar zekere, onmogelijke of mogelijke gebeurtenissen.

- Bij gegeven eindige uitkomstenverzamelingen van een eenvoudig experiment moeten de kinderen de voor een bepaalde gebeurtenis gunstige uitkomsten kunnen aangeven, tellen en in verband brengen met alle mogelijke uitkomsten.

- De kinderen dienen eenvoudige mogelijke gebeurtenissen te kunnen ordenen naar de waarschijnlijkheid van hun optreden.

3. **Instappen in de probleemsituatie**

Een stillees-les: Monieks feest



'9 mei '71

beste wim

morgen ben ik jarig
kom je ook op mijn feestje?
het begint om vier uur.
om zes uur is het afgelopen.
mijn papa brengt je weerthuis

moniek

Moniek legt met een zucht haar pen neer. Hè, hè, de uitnodigingen voor de jongens zijn klaar. Nu nog 12 voor de meisjes. Het is een heel werk.
Ze moet bij elkaar wel 18 kaartjes schrijven!
Kleine Ed van drie jaar komt binnen. Hij doet een greep naar de kaartjes. 'Afblijven, Ed!', zegt Moniek geërgerd. Ze haalt hem bij de tafel weg. Moeder hoorde alles. Ze roept: 'Ed, kom maar in de keuken!'
Ed gaat. Zo, nu kan Moniek weer ongestoord verder schrijven.

Eindelijk is het dan zo ver. Gelukkig is er niemand ziek. Ze zijn allemaal gekomen. Uit alle monden klinkt het heel hard: 'Lang zal ze leven ...'
Ed doet ook mee: 'Lange Niekie lééfve'. Moniek vindt dat leuk. Ze heeft trouwens niet meer broertjes of zusjes. Als het lied uit is, komt moeder met de taart binnen. De kaarsjes branden. Moniek probeert ze in één keer uit te blazen. Dit lukt niet. Ze doet er twee keer over. Moeder snijdt de taart. Ieder krijgt een stuk en ook een glas limonade. Er wordt druk gepraat. Het is reuze gezellig! De feeststemming zit er al goed in. 'Zo, jongens', zegt moeder, als ieder alles op heeft, 'ga maar in een kring staan. Ik zal aftellen. Wie 'weg' is mag een spelletje kiezen'. Moeder begint: 'Op-de-am-stel-veen-se-weg ...' Dat treft; Moniek is 'weg'. Leuk voor haar. Zij is jarig en mag nog eerst kiezen ook!
Moniek denkt na en roept: 'Ja! Ik weet wat! Blinddoek met de schaar!' (zie 4.2.2)
'Hè, wat is dat nou weer', roepen enkele kinderen.
Moeder legt het uit. Ze doen daarna nog veel meer spelletjes. Zo vliegt de tijd om. Het is een heel fijn feest. Het is bijna zes uur. Nu komt de vader van Moniek thuis. Hij brengt de kinderen in groepjes van zes naar huis. Met de auto. Jammer! Wat was dat feest vlug voorbij!

4 Beschrijving van een stukje onderwijs

4.1 De ervaring

4.1.1 Na het bespreken van het verhaal, waarin moeilijke woorden en begrippen nog eens de revue passeren en waarin eventueel enkele kwantitatieve aspecten aanleiding geven tot eenvoudig rekenwerk, worden *gebeurtenissen* in het verhaal naar voren gehaald. We doen dit naar aanleiding van korte dramatiseringen door de kinderen:

'Moniek legt zuchtend haar pen neer'... wie van jullie kan dit uitbeelden?
En wie...
'Kleine Ed komt binnen'
'Moeder roept uit de keuken: 'Ed, kom hier!'
'Moeder snijdt de taart'
'We gaan allen in de kring staan'
'Moeder telt af'
'Moniek 'waait weg'
'Vader komt thuis'
'Vader brengt de kinderen in groepjes van zes naar huis'

De kinderen worden uitgenodigd om ook enkele gebeurtenissen te noemen, die anderen dan weer mogen uitbeelden.
Juf schrijft de gebeurtenissen op het bord (eventueel op kaartjes voor het flanelbord).

4.1.2 '(on)mogelijk'

In de volgende les(sen) trachten we onderscheid te maken tussen gebeurtenissen. Het stilleesverhaal kan weer uitgangspunt zijn. Wat kan er

tenslotte allemaal niet gebeuren op zo een kinderpartijtje. Juf en kinderen fantaseren heel wat bij elkaar:

'Yvonne prikt een ballon stuk'
'Alle kinderen krijgen een glas limonade'
'Wim blaast alle kaarsjes aan'
'Kleine Ed komt binnen met 1000 ballonnen'
'Bij elk aftelversje blijft Moniek steeds over'

Het weten vanuit de eigen ervaring en de (on)mogelijkheid om de gebeurtenis uit te beelden (d.m.v. creatief spel) leverden het kriterium voor de kwalificatie. De uiteindelijke uitspraak over het 'mogelijk' of 'onmogelijke' van een gebeurtenis is een zaak van de hele klas. Het criterium van de waarheid is hier dan ook de eensgezindheid van de klas, die bereikt is onder het toeziend oog van de juf. Na dit inleidende gesprek gaan de kinderen individueel of in kleine groepjes een aantal gebeurtenissen klassificeren: 'onmogelijk' of 'mogelijk'. De problematiek wordt besproken in een afrondend leergesprek.

4.1.3 'Zeker'

Er zijn ook gebeurtenissen die *zêker* zullen optreden:

'Moniek is volgend jaar weer jarig'
'Om kwart voor twaalf gaat de school uit'
'Morgen is het dinsdag'
'Op 21 maart begint de lente'
'Eerste paasdag valt op zondag'

Juf en kinderen verzamelen gebeurtenissen en bepalen daaruit de 'zekere'. Een nieuw aspect wordt toegevoegd: we introduceren de waarschijnlijkheidsladder, waarop voorlopig de kwalificaties onmogelijk, mogelijk en zeker voor gegeven gebeurtenissen kunnen worden aangegeven.

Bijvoorbeeld:

Onze juf is ouder dan 10 jaar

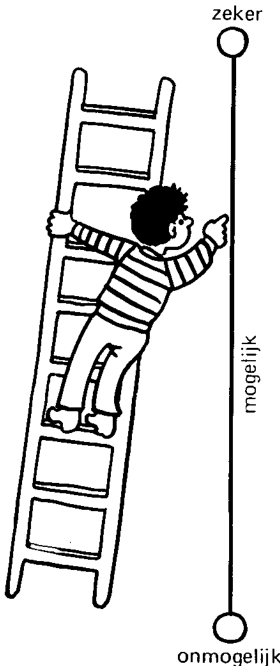
'zeker'

Er zit een kind van 20 jaar in de eerste klas

'onmogelijk'

Vader en moeder zijn samen ouder dan 50 jaar

'mogelijk'



4.1.4 Veranderingen aanbrengen

Juf heeft tijdens de voorgaande lessen heel ijverig de 'mogelijke gebeurtenissen' opgespaard. Deze verzameling kan het uitgangspunt zijn van een les, waarin de begrippen zeker, mogelijk en onmogelijk t.a.v. gebeurtenissen nog een betere vulling krijgen. Niet alleen nog het kwalificeren van gegeven zinnen wordt beoefend. De kinderen worden nu ook actief betrokken bij het onder woorden brengen van zekere, onmogelijke en mogelijke gebeurtenissen.

'Pietje van vijf jaar heeft een zwarte baard'. 

Wie kan hierin iets veranderen waardoor er een gebeurtenis wordt beschreven die mogelijk is?

'Pietje krijgt een zwarte baard als hij 18 is' 

En

'Juf is twee keer per jaar jarig' 

Dit laatste voorbeeld zal het o.a. duidelijk maken dat dit soort uitspraken over gebeurtenissen plaats- en tijdgebonden zijn.
De juf zal vooral in deze lessen dan ook in hoge mate inventief moeten zijn.

4.1.5 Ter afronding van deze serie introducerende lessen kan een individuele opdracht dienen

Vul op de kansschaal in:
'morgen is het woensdag'
'het schaap heeft vier poten'
'daar rijdt een auto zonder wielen'
'dat huis heeft twintig ramen'
'gisteren hadden ze ijsvrij in Wormerveer'
'vader wint de eerste prijs in de toto'
'we gaan binnen een jaar verhuizen'
'Jan reist deze week naar Amsterdam'
'volgend jaar zit er een Wim in de derde klas'
'de schoolbel gaat precies om kwart voor twaalf'
'er zit in die klas een meisje met vlechten'
'dat meisje heet Dorris'
'die meester heeft 100 kinderen in de klas'
'juf heeft gisteren 100 boterhammen gegeten'
'juf heeft gisteren minstens één boterham gegeten'
'dat meisje uit de tweede klas gaat voor 10 uur naar bed'

4.2 A priori

4.2.1 In de komende lessen is een fundamenteel verschil met de voorgaande op te merken. Werden tot nu toe de gebeurtenissen gekwalificeerd op basis van ervaringsgegevens, de komende activiteiten richten zich op een meer exacte bepaling van de mate van waarschijnlijkheid: het a priori-kansbegrip — weliswaar in kwalitatieve vorm — wordt in de beschouwingen opgenomen.

4.2.2 Een spelletje

We gaan nog eens even op bezoek bij Moniek. Het feest is in volle gang. Ze zijn juist bezig met spelletjes. Eens even kijken wat er allemaal gebeurt. O, kijk, Wim heeft een blinddoek voor en een schaar in zijn hand. Aan een draad heeft moeder de getallen 1 t/m 10 opgehangen.

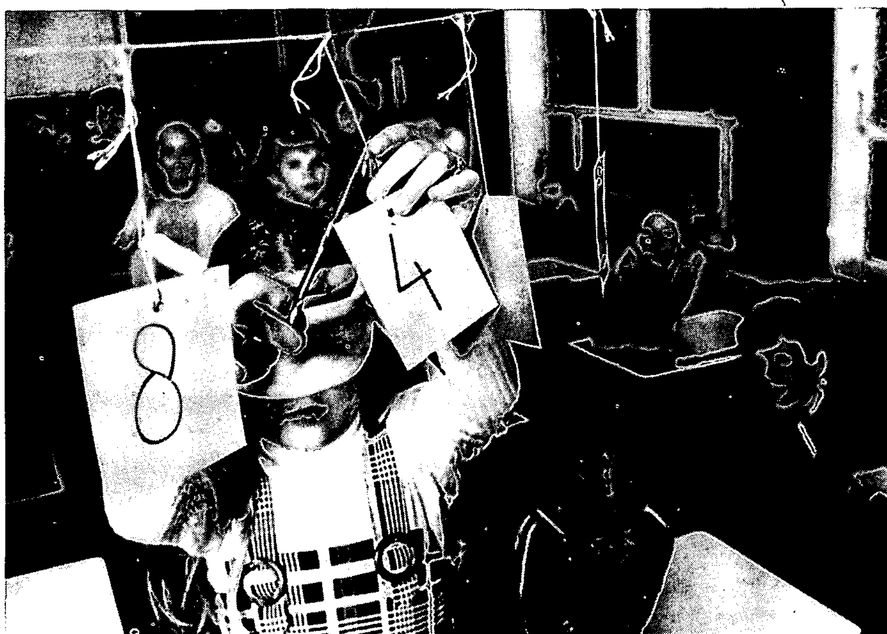


foto: Henk Schuurmans, Oss

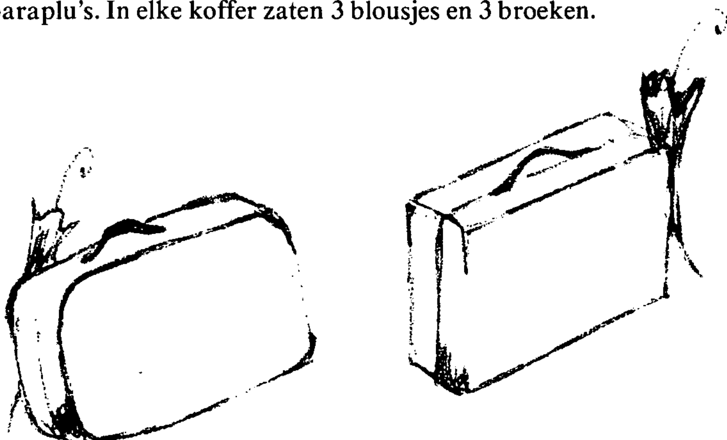
Elk kind mag een keer geblinddoekt precies één nummer eraf knippen. Ze hebben afgesproken:
'Wie er een onder de vier heeft, krijgt een prijs'.
Piet heeft nummer 7 geknipt. Krijgt hij een prijs?
Hoeveel kinderen krijgen een prijs? Hoeveel niet?
Zullen we dat spel ook eens spelen? Natuurlijk heeft juf hierop gerekend. De nummerlijn wordt opgehangen, de gasten uitgezocht en de pret begint. Onderwijl worden vragen en problemen opgeworpen:
Heeft Jan nu nog kans op een prijs?

Hoeveel prijzen hangen er nog?
Hoe vaak kun je nu nog 'een niet' knippen?
Plaats de gebeurtenis 'De volgende krijgt een prijs' op de kansladder.
Enfin, hier liggen vele voortzettingen die we graag in de praktijk van het onderwijs door juf en kinderen zouden willen laten beoordelen.

4.2.3 Nog twee spelletjes

Verkleedwedstrijd

Moeder verdeelde de kinderen in twee groepen van 10. Die groepen gingen achter een startlijn staan. Aan het einde van de kamer stonden twee koffers en twee paraplu's. In elke koffer zaten 3 blousjes en 3 broeken.



Moeder vertelde de spelregels:
Als ze het startsein gaf zouden van elke groep twee kinderen naar elke koffer rennen. Ze maken die snel open en trekken een blouse en een broek aan. Zodra een paar kinderen aangekleed zijn, steken ze de paraplu op, kleden zich daarna weer snel uit, sluiten de koffer en de paraplu en tikken het volgende paar van hun groep aan.
'Denk erom', vertelde moeder, 'elk kind van een groep moet steeds verschillend gekleed zijn', anders krijg je een strafpunt.'

Dames en heren

Vier jongens moesten de kamer uit. Vier meisjes gingen op een rij naast elkaar zitten en overlegden welke 'heer' bij welke 'dame' zal behoren.
De eerste jongen mocht binnenkomen. Hij kiest een meisje uit tot zijn dame door een diepe buiging voor haar te maken.
Als hij goed gekozen had zou hij in de kamer mogen blijven, als hij verkeerd gekozen heeft, gaat hij terug en mag met de andere 'heren' overleggen.
Dan is heer nummer 2 aan de beurt, enz.
We laten de op te werpen vragen en problemen graag aan de lezer over.

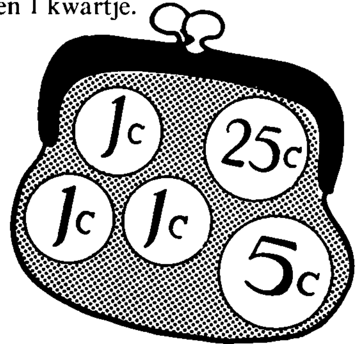
4.2.4 We besluiten dit gedeelte met een les, waarin dezelfde problematiek — nu in een gladgestreken vorm — wordt aangeboden. De hier gecreëerde concrete situaties zijn al gestyleerd door het probleem, dat aan de orde moest worden gesteld. We stellen het moment waarop deze benaderingswijze zijn intrede zou moeten doen in het leerproces, nog ter discussie.

De onderwijzeres doet 3 blokjes (2 rode en 1 groene) in een doosje. Ze haalt er 2 uit.
Raad eens wat ik in mijn hand heb?
Er ontstaat een discussie: is er een rode bij? is er een groene bij? zijn beide rood? zijn beide groen?

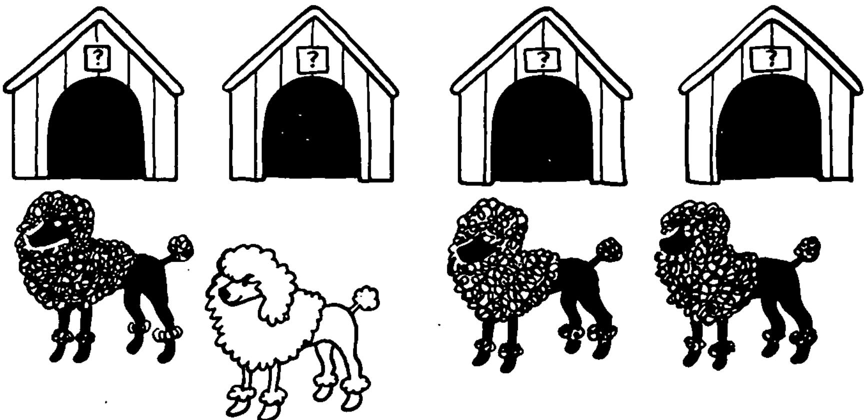
Nu 4 blokjes: 2 rode en 2 groene. De onderwijzeres haalt er 3 uit. Geef aan op de kansschaal: er is een rode bij, er is een groene bij, enz.
Zijn de antwoorden juist? We nemen de proef op de som.

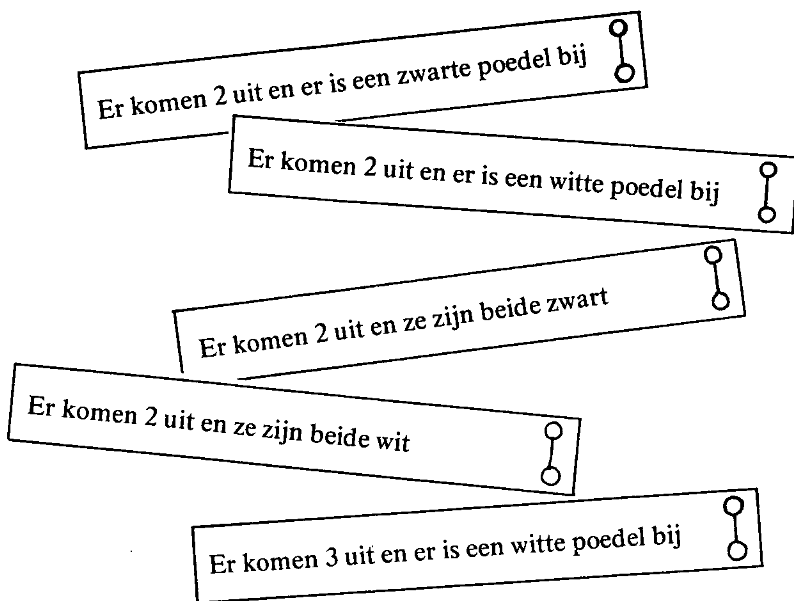
Nog een proefje: groepen van drie.
Materiaal: 3 rode en 3 groene blokjes. Op ruitjespapier 4 kolommen: 3 rode, 2 rode en 1 groene, 1 rode en 2 groene, 3 groene.
Een leerling schudt, de tweede neemt — ongezien — 3 blokjes, de laatste kruist aan in de betreffende kolom. Totaal 30 keer.
Klassikale bespreking van de resultaten. Waren er nog andere mogelijkheden?

Twee individuele oefeningen:
1 In een portemonnee zitten 3 centen, 1 stuiver en 1 kwartje.
Ik schud 3 munten uit de 'knip'.
Aangeven op de kansschaal
'er is een cent bij?'
'er zijn 2 centen bij?'
'er is een kwartje bij'
'het zijn 3 centen'
'er zijn twee stuivers bij'
'je kunt iets van een stuiver kopen'
'het is nog geen 30 cent'



2 Vier poedeltjes, elk in een hokkie





5 Samenvatting

Via een stilleesles worden kinderen van omstreeks zeven jaar voor het probleem gesteld om gebeurtenissen naar mate van het mogelijk zijn ervan te onderscheiden. Bij het beoordelen spelen enerzijds de ervaring, anderzijds het kunnen overzien van alle mogelijke uitkomsten van het experiment een rol. In het eerste geval — op hoger niveau eveneens niet eenvoudig — leveren creatief spel en eenstemmigheid van de klas de gewenste criteria. In het tweede komen exactere methoden in aanmerking.
Alle genoemde activiteiten staan in dienst van een leerproces, waarin een kwalitatief begrip van waarschijnlijkheid wordt gevormd.
Leerstof, leermiddelen en werkvormen van het huidige rekenonderwijs bieden hiertoe voldoende aangrijpingspunten.

Een statistisch onderzoek



1 Achtergrondinformatie

Een belangrijk aspect van een baken is dat het uitgangspunt een probleem is. Een probleem, dat gekozen dient te worden in de wereld van het kind. Door de pregnante aanwezigheid van de massamedia, ook in deze kinderwereld, wordt een overstelpende hoeveelheid aan statistisch materiaal gepresenteerd. Vele geschikte problemen dienen zich hierbinnen aan.
Vooral omdat landelijk reeds veel gegevens verzameld, geanalyseerd en geïnterpreteerd zijn over het verkeer, kozen we dit onderwerp als centraal thema voor de hierna te beschrijven activiteiten.

2 Beginsituatie en doelstelling

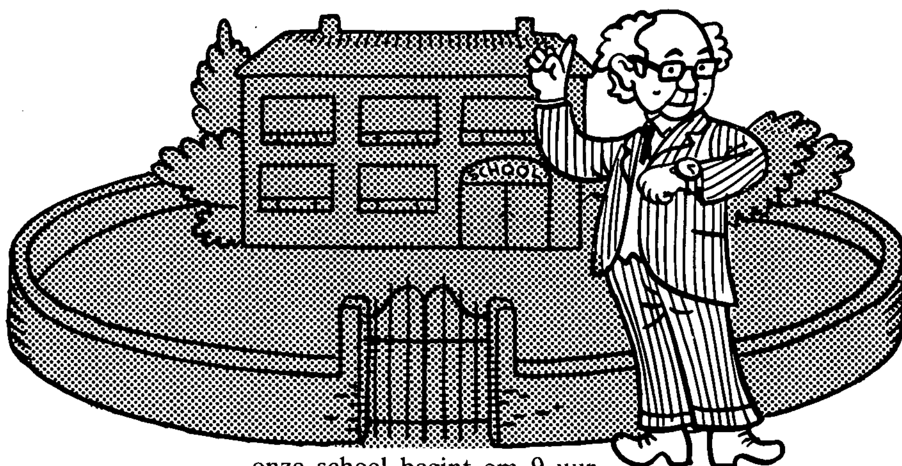
We gaan ervan uit dat we te maken hebben met leerlingen van 9 — 10 jaar, die in de vierde of vijfde klas van de basisschool zitten. Een statistisch onderzoek, waarin een zekere stelling aan de werkelijkheid getoetst wordt, heeft men nog niet eerder gedaan. Activiteiten, waarin gegevens uit de eigen omgeving verzameld, geordend en in tabellen en histogrammen verwerkt zijn, hebben t.a.v. velerlei onderwerpen plaats gevonden. In het volgend onderzoek willen we de kinderen leren hoe door een wiskundige aanpak — statistische methoden — een concreet probleem tot een oplossing kan worden gebracht. Tijdens dit leerproces krijgen nader te noemen begrippen een vulling en worden zekere vaardigheden geoefend.

3 Instappen in de probleemsituatie

De instructie van de nieuwe verkeersbrigadiertjes levert ons de uitgangsproblematiek. 'Waarom moeten zij al om kwart over acht op hun post zijn en waarom hebben we op die bepaalde punten alleen maar klaarovers staan?'
Na een klassegesprek, waarin het probleem nogeens duidelijk gesteld is en de diverse aspecten nader belicht zijn, besluiten we tot een eerste onderzoek dicht bij huis (de school).

4 Beschrijving van een stukje onderwijs

Het schoolplein biedt vele mogelijkheden tot het verrichten van een statistisch onderzoek in een voor de leerlingen vertrouwde omgeving. De organisatie is eenvoudig te realiseren: de leerkracht kan alles overzien en zonodig bijsturen.



onze school begint om 9 uur

..... een begin(netje) rond de school .....

Het 'schoolplein' kan tevens als model staan voor een later op te zetten meer uitgebreid onderzoek.

4.1 Aankomst-tijden

Op verschillende dagen kunnen we de tijdstippen vaststellen waarop de leerlingen het schoolplein betreden.

Fase 1: 'De meeste leerlingen komen tussen half negen en tien over half negen op school!' Deze hypothese wordt door de leerkracht op het bord geschreven en ter discussie gesteld. Juist? Onjuist?
Uit het gesprek blijkt de noodzaak tot het verrichten van onderzoek. Hoe zetten we het op?

Fase 2: Besloten wordt om waarnemingen te doen gedurende de tijdsintervallen:
tien voor half negen — half negen
half negen — tien over half negen
tien over half negen — tien voor negen
tien voor negen -- negen uur.
Tevens wordt de techniek van het noteren der waarnemingen besproken.
Zou een enkele waarneming (op één morgen) voldoende zijn?
Wat verwachten jullie te zullen aantreffen?
Denk je dat je zult vinden dat de uitspraak op het bord juist is?

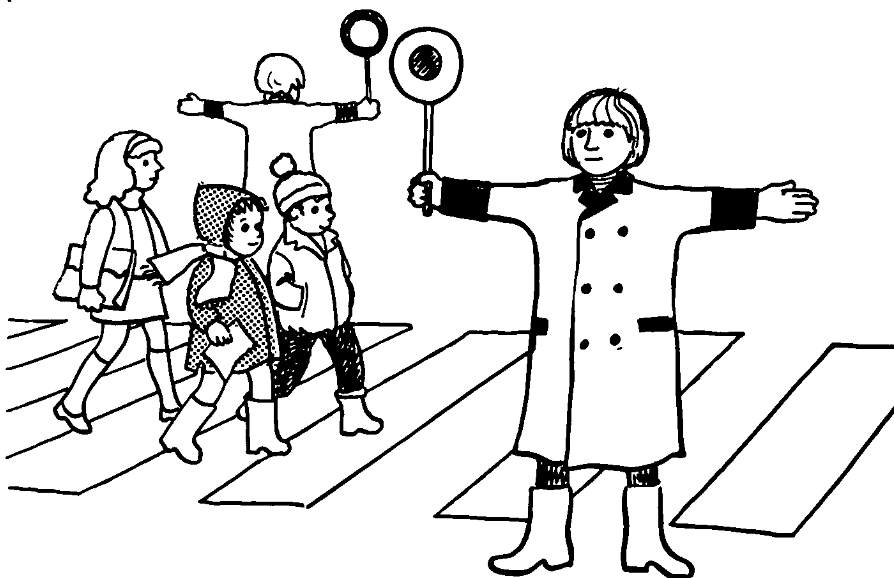
Fase 3: Het waarnemen in groepsverband; het turven.
Problemen: in- en uitlopende leerlingen!

Fase 4: Hoe kunnen we de gegevens het beste in een overzicht plaatsen?
Korte instructieles.

Fase 5: Confrontatie van de verzamelde gegevens met de hypothese. Welke conclusie?
Zou het overzicht er op iedere dag ongeveer gelijk uitzien (regenachtig weer; maandagmorgen)?
Formuleer zelf eventueel een 'betere' hypothese! Onderzoek op verschillende dagen is gewenst. Nadat de gegevens uit een dergelijke voortzetting verwerkt zijn, is het wellicht gewenst om een aantal uitspraken ter discussie te stellen, bijvoorbeeld:
— de meeste leerlingen komen na tien over half negen op school,
— in alle genoemde tijdsintervallen komen steeds ongeveer dezelfde aantallen leerlingen op school,
— minder dan tien leerlingen komen na negen uur op school,
— alle eerste-klassers komen na tien voor negen op school,
— in Nederland komen de meeste leerlingen tussen half negen en kwart voor negen op school.

4.2 School en verkeer

Vraag: *Waar, hoeveel, en op welke tijdstippen moeten verkeersbrigadiers geplaatst worden?*



Wat moeten we weten om deze vraag te kunnen beantwoorden?
Wellicht komen de leerlingen tot de volgende 'noodzakelijkheden':

- kennis omtrent vertrektijden van medeleerlingen,
- kennis omtrent gevolgde 'routes',
- kennis omtrent de wijze waarop de leerlingen de school bereiken,
- kennis omtrent de verkeersintensiteit in diverse straten rond de school.

De leerlingen worden over vier groepen verdeeld; iedere groep moet één van de bovenstaande aspecten onderzoeken. Om zelfstandig werken te bevorderen, is het gebruik van opdrachtkaarten aan te bevelen. We geven u een voorbeeld:

ONDERZOEK:	klas:	serie:	no:

Hoe gaan de leerlingen van klas 3 naar school?
Welke straten gebruiken ze? Waar steken ze over?

Maak een vragenlijst; bedenk zelf hoe de vragenlijst eruit moet zien.

Bespreek dit uitvoerig in je groepje!

Er moet in elk geval op staan:

* de *naam* van de leerling die ondervraagd wordt,
* het *tijdstip* waarop hij of zij van huis is gegaan,
* het *vervoermiddel* dat deze leerling gebruikte,
* de *route* die deze leerling volgde naar school.

Draai de vragenlijst af op de vloeistof-duplikator. Liever te veel dan te weinig!

Voer het onderzoek uit.

Neem nu de plattegrond aan de achterzijde van deze kaart.
Teken voor iedere leerling een lijn van zijn huis naar de school. Zo krijg je in één tekening vele routes. Klaar?
Schrijf op wat je nu opvalt aan de tekening.

* Welke straten worden het meest door de leerlingen van onze school gebruikt?
* Wat zet je als titel boven deze tekening?
* Kun je iets zeggen over de routes van alle leerlingen van onze school?

4.3 Nadat de leerlingen in fase 4 hebben geleerd een overzicht te maken, blijkt nu duidelijk de noodzakelijkheid van andere vormen van grafische verwerking.

onderwerp	activiteit	vormgeving
vertrektijden	classificeren	tabel, histogram
routes	groeperen naar hoofdroutes	plattegrond
wijze waarop de leerlingen de school bereiken	classificeren	piktogram, histogram, sectordiagram
verkeersintensiteit	groeperen naar hoofdroutes; turven	plattegrond, tabel, histogram

4.4 Terugkoppeling naar de vraag betreffende de verkeersbrigadiers. De leerlingen kunnen in groepen trachten een antwoord op deze vraag te geven met behulp van verzamelde gegevens. Verondersteld mag worden dat de leerkracht hieraan voorafgaande enige duidelijke hints zal moeten geven.
De resultaten van het groepsgesprek worden plenair besproken; conclusies worden geformuleerd. Deze worden in de vorm van een krant aangeboden aan degene die de brigadiers opleidt en plaatst, de ouders, de medeleerlingen, enz.

5 Samenvatting

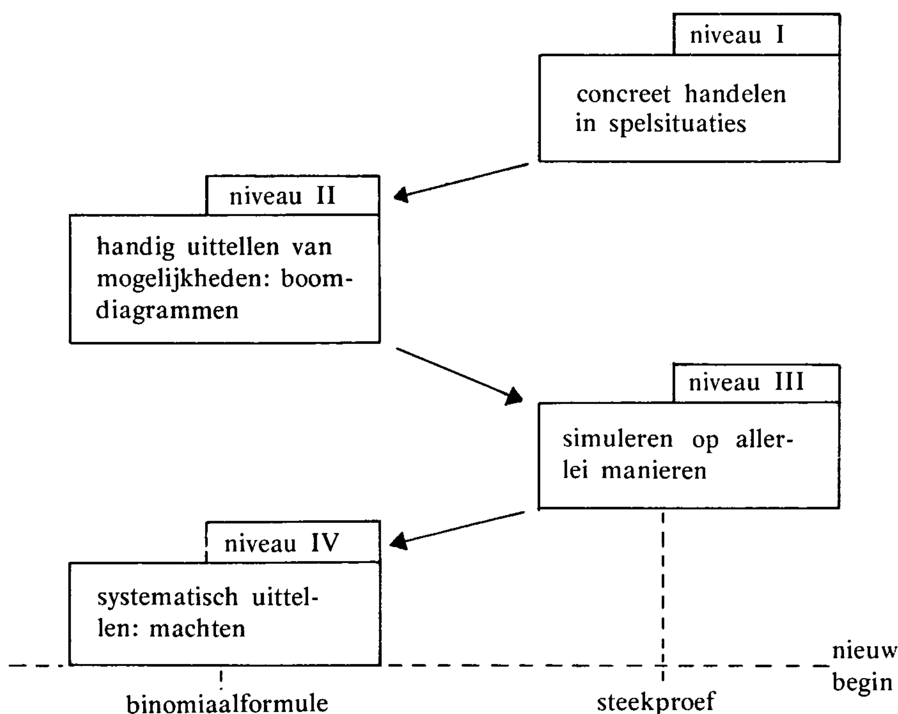
Naar aanleiding van de problematiek rond de verkeersbrigadiertjes — aanvangstijd en plaats — worden de leerlingen gemotiveerd om op 'onderzoek te gaan'. De activiteiten met betrekking tot dit onderzoek worden binnen statistische banen geleid. De betrekkelijkheid van zekere — soms met stelligheid geponeerde —stellingen wordt empirisch aangetoond. De kinderen leren, naast vaardigheden als het verrichten van waarnemingen, het verwerken van de gegevens op diverse manieren en enkele statistische begrippen, de noodzaak in te zien van het statistisch onderzoek, dat dient te volgen op geformuleerde hypothesen. Het trekken van conclusies uit het onderzoek kan aanleiding zijn om naar een volgend baken te gaan uitzien. In hoge mate zal de behoefte aan een vervolg zich opdringen als, door het vergelijken van de eigen resultaten met die van het Centraal Bureau voor de Statistiek, het begrip toeval — kans aan de orde komt.

De toto



1 Achtergrondinformatie

In dit baken gaan we uit van enige problematiek rond de voetbaltoto. Naast hetgeen reeds hiervoor gesteld werd betreffende de belevingswereld van het kind, willen we hier een poging doen de leerpsychologische structuur expliciet te maken. We menen dat het — wiskundig — leerproces in enge zin, gericht is op het leren van handelingsstructuren, waarin begrippen (en de relaties hiertussen) zijn ingebed.
Wiskundeonderwijs beoogt echter meer dan dat. De kinderen moeten in staat gesteld worden om een ruim 'probleemveld' te structureren. Isomorfe vraagstukken hierbinnen kunnen dan herkend en adekwaat opgelost worden. We zien — minstens ten aanzien van dit baken — de fasering van het leerproces aldus:



2 Beginsituatie en doelstelling

Dit baken richt zich op de leeftijdsgroep 10 — 12 jaar.
De leerlingen kennen de fundamentele bewerkingen met natuurlijke getallen. Het aanschouwelijk kunnen rekenen met breuken kan nuttig zijn, wordt echter niet verondersteld. De leerlingen hebben enig begrip van 'grote getallen' (miljoenen). De leerlingen hebben enige oefening in het mathematiseren van eenvoudige problemen, in het bijzonder met behulp van de volgende middelen:

a tabellen met twee ingangen (voorbeelden: lesrooster, afstanden tussen stations en spoorwegnet).
b Grafieken in de vorm van histogrammen (voorbeelden: aantal kinderen die in een bepaalde maand jarig zijn, aantal kinderen van een bepaalde lengte en gewichtsklasse).
c Boomdiagrammen voor systematisch ordenen van gebeurtenisreeksen (voorbeelden: wegen in vierkant stratennet, stratennet van gelijkzijdige driehoeken, stamboom, samenstellen van menu's, kiezen van telefoonnummers, distributie van goederen in verschillende etappes).
d Systematisch tellen door het aanbrengen van structuren in de te tellen verzamelingen.

De leerlingen zijn vertrouwd met kwalitatieve waarschijnlijkheden zoals uiteengezet in baken 1.
De leerlingen hebben enige notie van wat 'toto' inhoudt.

We stellen ons tot doel om de leerlingen te leren werken met kwantitatieve waarschijnlijkheden op de drie hiervoor genoemde niveaus. We verwachten dat deze ervaringen een geschikte beginsituatie vermogen te scheppen voor de overgang naar het vierde niveau. Gespecificeerd in intermediaire leerdoelen:

2.1 het herkennen en uitvinden van keuze-situaties van k gebeurtenissen ($k = 2, 3, 4, \ldots$)
2.2 het simuleren van dergelijke keuze-situaties
2.3 het symboliseren ervan (bv. met de cijfers $0, 1, \ldots, k-1$)
2.4 het herkennen en uitvinden van aflopen van mogelijke gebeurtenisreeksen uit keuze-situaties van k gebeurtenissen
2.5 het simuleren van zulke aflopen (met kans-instrumenten en toevalsgetallen)
2.6 het symboliseren ervan (met getallenrijen of boomdiagrammen)
2.7 kansformuleringen volgens het schema 'dit gebeurt in ... op de .... gevallen'
2.8 kansberekeningen door het tellen van uitkomsten
2.9 het simuleren van situaties, waar de afzonderlijke keuzen niet gelijk-waarschijnlijk zijn

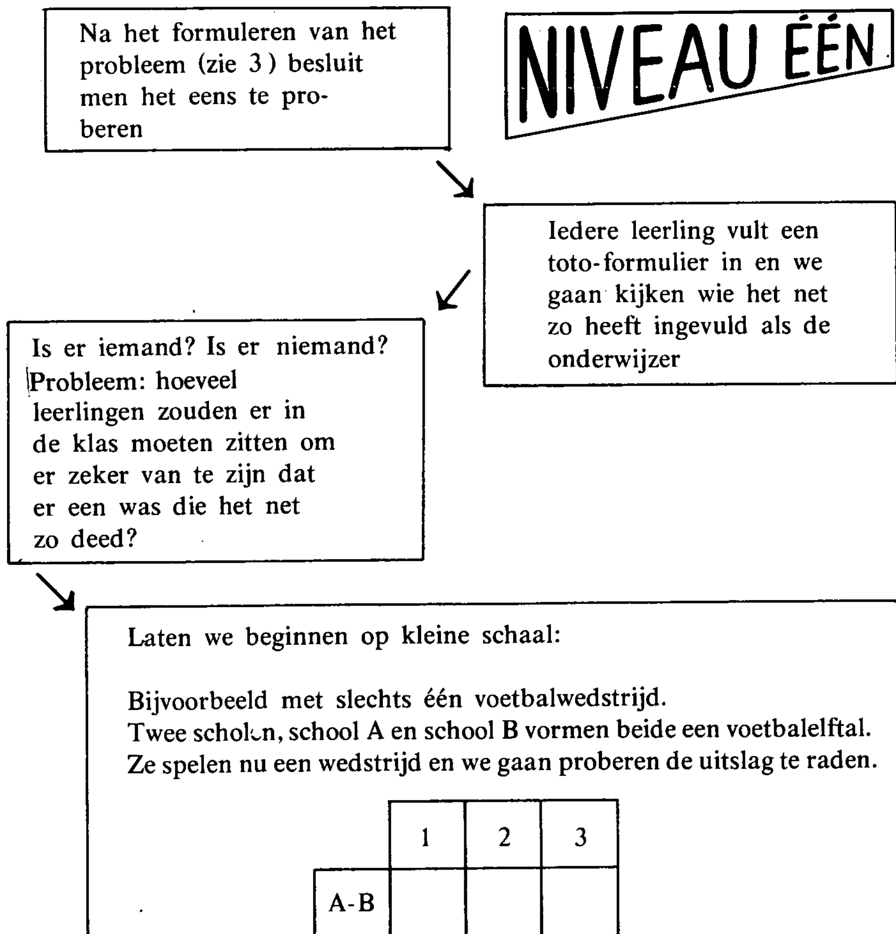
2.10 het simuleren van gebeurtenisreeksen hiervan
2.11 het opzetten, uitvoeren, verwerken en rapporteren van een onderzoek naar waarschijnlijkheden (theoretisch of empirisch in het raam het voorafgaande.

3 Instappen in de probleemsituatie

Deze week zijn er 2 eerste-prijswinnaars gemeld van de voetbaltoto. Is het nu zo moeilijk om dat formulier goed in te vullen? Laatst las ik dat een oude dame, die van voetballen hoegenaamd niets wist, de enige was, die 13 goed had. Heb je wel 'kans' om te winnen als je het formulier lukraak invult?

4 Beschrijving van een stukje onderwijs

4.1 Schets van een leergang



	1	2	3
A-B			

Afgesproken wordt, dat een kruisje in het hokje onder 1 aangeeft dat school A wint, een kruisje in het hokje onder 2 dat school B wint, een kruisje onder 3 dat school A en B gelijk spelen.
Iedere leerling raadt nu de uitslag van deze voetbalwedstrijd. De onderwijzer zet ook een kruisje en dan kijken we wie het net zo heeft ingevuld als de onderwijzer.
Nu blijken een vrij groot aantal leerlingen het kruisje net zo geplaatst te hebben, als de onderwijzer. Hij vraagt hoe het komt dat nu wél een aantal leerlingen hetzelfde hebben ingevuld als hij. Het antwoord komt uit de klas: omdat er nu veel minder mogelijkheden zijn om het ene kruisje neer te zetten. Er zijn nu 3 plaatsen om een kruisje te zetten en bij de echte toto waren er veel meer.

↙

Nu gaan we het doen met twee wedstrijden!

	1	2	3
A-B			
C-D			

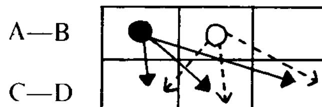
Er zijn nu veel minder 'goede' invullingen.

↘

Praatje: Hoe komt dat?
Lln.: Er zijn nu meer mogelijkheden!
a In de klas wordt het aantal voorkomende invullingen vastgesteld:

1	1	2	etc
1	3	1	
3 keer	5 keer	2 keer	etc.

Zijn dit alle manieren van invullen die mogelijk zijn?
b Het antwoord op deze vraag kan worden gegeven door 'handig tellen' $3 \times 3 = 9$



Op analoge wijze wordt nu een poging gedaan het aantal mogelijkheden bij drie wedstrijden vast te stellen.

↘

OVERGANG NAAR NIVEAU TWEE

Met enige isomorfe problemen wordt de procedure herhaald. Een voorbeeld:

Kleur één poppetje van een rijtje van drie rood.
Wie heeft het net zo als de onderwijzer?
En bij twee rijtjes, etc.

N.B.:

1 Voor andere voorbeelden: zie 2 c, blz. 265).
2 Men kan het proces versnellen door de leerlingen die het na een , resp. twee , etc. (nog) goed hebben de vinger te laten opsteken (Dit biedt — eventueel in later stadium — de mogelijkheid om het aantal opgestoken vingers na 1, 2, 3, 4 keer te laten voorspellen). Hetzelfde kan ook worden zichtbaar gemaakt door de leerlingen die het (nog) goed hebben, te laten opstaan (je kunt dan — bij snel herhalen — duidelijk een soort — exponentiële — 'afval' zien).

NIVEAU DRIE

↙

Niveau II wordt verder afgerond door het aantal mogelijkheden van twee (drie) wedstrijden met boomdiagrammen definitief vast te stellen en datzelfde ook te doen bij andere problemen (zie 2 c (blz. 265).

↘

'Maar er waren 13 wedstrijden! Laten we eens gaan kijken hoe het gaat als we bv. een schoolvoetbaltoernooi zouden houden met 16 schoolvoetbalelftallen, die op een bepaalde middag 8 wedstrijden spelen (of 8 damwedstrijden tussen paren leerlingen)'.
We maken met de klas een toto-formulier voor deze 8 wedstrijden.

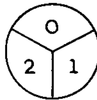
We kunnen niet wachten op al die wedstrijduitslagen. Laten we iets bedenken om uitslagen willekeurig vast te stellen. Is het tossen iets?

We zoeken met de klas naar simulatiemogelijkheden en voeren die ook uit. Enkele voorbeelden:

a dobbelsteen

1,2	winst
3,4	gelijk
5,6	verlies

b tolletje maken op spijker





c kiezen uit identieke luciferdoosjes met resp. 0, 1, 2 lucifers erin.
d bus met kaartjes met 0, 1, 2 erop.
e idem met knikkers in 3 kleuren, etc.

Een voorbeeld in de vorm van een opdrachtkaart.

Aantal leerlingen 3-4

Materiaal: *dobbelstenen, ruitjespapier, liniaal.*

Opdracht: We gaan een voetbalkompetitie 'nabootsen'.
Aan de kompetitie nemen 5 klubs deel.
(Geef ze de namen: A, B ... enz., of verzin zelf namen.)
Elke klub speelt tegen elke andere klub twee keer: één keer uit en één keer thuis.
De dobbelstenen bepalen de uitslag van elke wedstrijd.

a Schrijf eerst van elke klub alle wedstrijden op, die hij 'spelen' moet.
b 'Speel' de wedstrijden en geef de winnaar 2 punten; bij gelijk spel elk 1 punt. (Als je 't leuk vindt mag je er ook doelpunten bij gooien met de dobbelsteen. Verzin zelf hoe!)
c Maak de eindstand van de kompetitie op.
d Schrijf een verslag.

OVERGANG NAAR NIVEAU VIER

Het gaat er hier om dat 'spelen', 'tellen in diagrammen' en 'simuleren' verbonden worden in het kwantificeren van de kans. Een voorbeeld van deze overgang is uitgewerkt in practicumvorm.

practicum(metje):

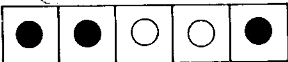


Je ziet hier getekend een rijtje van vijf lampen. In grote ziekenhuizen gebruikt men ze wel om artsen op te zoeken. Er is telefoon voor dokter Jansen, maar men weet niet waar hij is. In alle gangen hangt zo'n rijtje lampen. De man achter het schakelbord kijkt op zijn tabel en ziet het volgende:

Pietersen	10011
Klaassen	11001
Jansen	01011
Willems	11100

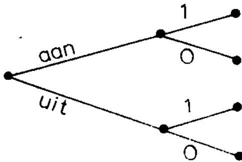
Hij haalt een paar schakelaars over... en even later meldt dokter Jansen zich.
*Teken hierboven eens welke lampen er gingen branden (inkleuren).

*Wie wordt er nu opgeroepen?



We willen weten hoeveel verschillende artsen er met 5 lampen kunnen worden opgeroepen.

Teken een boomdiagram en tel:



Er kunnen [ ] artsen worden opgeroepen.

In plaats van het tellen van alle mogelijke 'wegen' door het boomdiagram, kunnen we sneller te werk gaan (Als je het zelf al begrijpt, zeg 't dan nog niet, maar help je groepsgenoten met de volgende opdrachten).

Vul in:

aantal lampen	aantal mogelijkheden
1	..
2	..
3	..
4	..
5	..

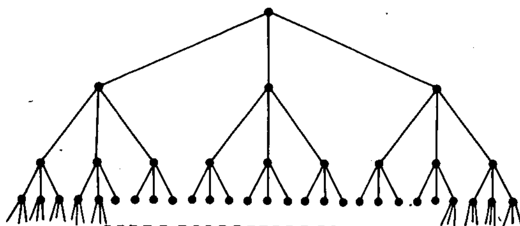
Bij 5 lampen zijn [   ] mogelijkheden om de lampen al dan niet te branden.



Toch kun je niet evenveel artsen oproepen

Hoeveel dan wel?

Wij keren terug naar de toto.



aantal wedstrijden	aantal mogelijkheden
1	..
2	$.. = ..^2$
3	$.. = ..^3$
4	$.. = ..^4$
5	..=..
6	..=..
.	
.	
.	
10	..=..
.	
.	
13	..=..

Zie je kans om de tabel aan te vullen?

Eindgesprek.
Het voorgaande passeert nog eens de revue. Wat hebben we ervan geleerd? Kun je nu antwoord geven op de vraag die in het begin gesteld werd? Welke vragen kun je nu op dezelfde wijze beantwoorden?
Dit gesprek kan de inleiding zijn op individuele opdrachten voor de leerlingen, waarin het zojuist geleerde funktioneel gebruikt zal worden.

4.2.0 Enkele overwegingen

4.2.1 Het is beslist noodzakelijk rustig de tijd te nemen met de leerlingen: diagrammen moeten helemaal worden uitgetekend (door de leerlingen), spelen gespeeld en simulaties uitgewerkt om de leerlingen gelegenheid te geven al doende ontdekkingen te doen.

4.2.2 In het stukje over de beginsituatie is reeds vermeld, dat we ervan uitgaan dat de leerlingen ervaring hebben met het tekenen en uittellen van diagrammen. Op de ontwerpschool hebben we de ervaring opgedaan, dat derde- en vierdeklassers dit al kunnen doen. Wel is het

nodig om op dat punt in de leergang hiermee nog weer eens uitdrukkelijk bezig te zijn (via enkele voorbeelden).

4.2.3 Zijn de in 2 genoemde doelen bereikt na doorwerken van de in 4.1 geschetste leergang? We hebben er geen test of toets voor. De lezer oordele zelf na doorwerking van de leergang met een zesde klas of een brugklas v.o. We zijn benieuwd naar uw bevindingen!

4.2.3.1 Men kan bij het invullen van de toto niet-gelijke waarschijnlijkheden invoeren door bijvoorbeeld voor de wedstrijd Ajax — Zundertse Boys bij de simulatie een tolletje te gebruiken dat 'anders' verdeeld is.



Wanneer men er breuken bij neemt ($\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$) kan men, eventueel ook weer via boomdiagrammen (wordt erg ingewikkeld) tot heel moeilijke berekeningen komen.

4.2.3.2 Een zeer waardevolle activiteit is het door de leerlingen laten uitvoeren van een onderzoekje naar waarschijnlijkheden: wat is de waarschijnlijkheid dat de volgende auto die langs komt, een Volkswagen is? De leerlingen moeten dan zelf tot een strategie-opstelling (telling, 'tolletjesverdeling') komen en een simulatie-techniek bedenken.

5 Samenvatting

De grootte van de kans op de hoofdprijs in de voetbaltoto staat ter discussie. Het aantal verschillende mogelijkheden, waarop een totoformulier kan worden ingevuld, wordt empirisch onderzocht. De kinderen ervaren a.h.w. aan den lijve hoe elke toegevoegde wedstrijd het aantal mogelijkheden vergroot. Dan wordt een serieuze poging ondernomen om het precieze aantal te tellen. Om praktische redenen wordt een bepaalde competitiedag gesimuleerd. Het voortbrengen van de uitkomsten (bij toeval) wordt nader onder de loep genomen. Ook hier speelt het aantal van **alle** mogelijke uitkomsten weer een rol. Het boomdiagram blijkt een mogelijkheid tot visualisering en een aanleiding tot het 'tellen' op hoger niveau.
Via het begrip 'macht' en de behoefte aan het invoeren van ongelijke waarschijnlijkheden komt reeds een volgend baken in zicht:
binomiale kansverdeling

Mathematische verwachting



1 Achtergrondinformatie

Het vak waarschijnlijkheids-rekening is ontstaan in een gesprek tussen een groot mathematicus en een beroepsgokker. Hoewel het toepassingsgebied van genoemd vak zich ver buiten deze menselijke zwakheid uitstrekt, hebben we in dit baken het fundamentele begin toch weer gekozen in de wereld van het geluksspel. Hier, aan de basis van de kansrekening, liggen de problemen nog duidelijk zichtbaar en voor het grijpen. Het werpen met dobbelstenen, het kopen bij een fruitautomaat of het spelen met onze 'kanspiano' — dit alles tegen een bepaalde inzet — doet al dan niet hooggestemde verwachtingen ontstaan. Veelal zijn de uitkomsten van voorgaande experimenten niet geregistreerd.
De mathematisering van genoemde hoop op winst leidt tot het begrip mathematische verwachting (E).
Bij het beschrijven van de onderwijsleersituatie noemen we in dit baken expliciet de diverse didactische werkvormen en leeractiviteiten.

2 Beginsituatie en doelstellingen

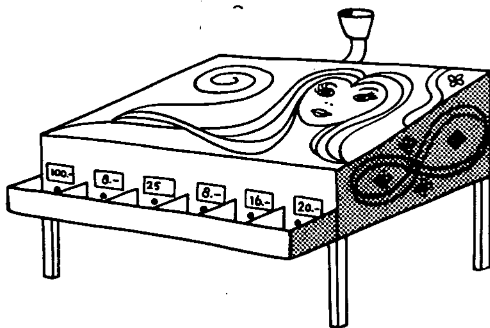
Dit baken vooronderstelt de kennis en vaardigheden op het terrein van de kwalitatieve en kwantitatieve kansrekening, zoals die in vorige bakens tot uitdrukking kwamen. Met name geldt dit voor:

— het simuleren van kansproblemen,
— het rekenen met kansen (som- en produktregel),
— het oplossen van telproblemen.

We stellen ons tot doel de leerling een leerproces te laten doorlopen, waarin het begrip mathematische verwachting wordt gevormd. Het operationeel zijn van dit begrip moet blijken uit het kunnen laten funktioneren ervan in concrete probleemsituaties.
Hier worden ook belangrijke eigenschappen als de lineariteit van E ($E(x+y) = Ex + Ey$) ontdekt en geleerd.
Door de gekozen didactische planning van het onderwijsleerproces hopen we een bijdrage te leveren tot het vormen van inzicht in een mathematiserende aanpak van problemen. We zien het simuleren van processen als een belangrijk element hiervan.

3 Instappen in de probleemsituatie

Op een schoolfeest, waarbij behalve een veel herrie producerende band nog allerlei andere attracties aanwezig zijn, staat o.a. een vreemd uitziende speelmachine. Deze machine ziet er als volgt uit:



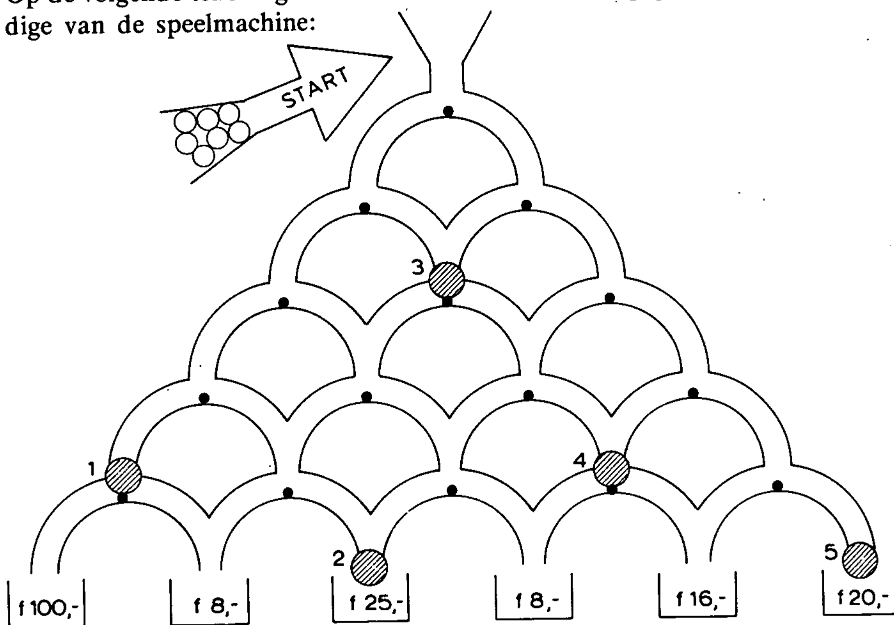
De exploitant van deze machine stelt tegen een bedrag van *f* 2,– een knikker beschikbaar.
Een speler gooit de knikker in de trechter en gaat aan de voor kant van de machine kijken in welk 'prijzenvak' de knikker terecht komt. De bedragen boven de vakjes zijn de te winnen prijzen.

Een speler wordt vaak teleurgesteld.
Zijn knikker blijkt nog al eens in een bak onder de trechter terecht te komen.

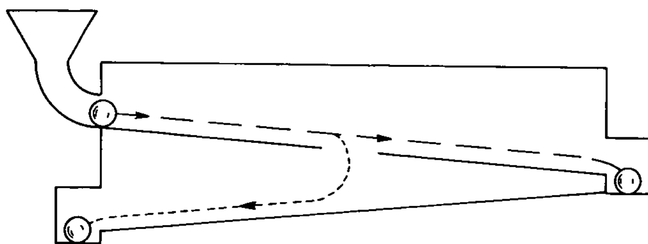
4 Beschrijving van een stukje onderwijs

4.1 Les 1

Het probleem is gesteld. We besluiten het apparaat — en de hebberigheid van de exploitant — aan een nader onderzoek te onderwerpen. De constructie van het inwendige van de speelmachine wordt daartoe eerst prijsgegeven.
Op de volgende tekening is een schematisch overzicht gegeven van het inwendige van de speelmachine:



De zwarte punten zijn spijkers.
De gearceerde cirkeltjes zijn gaten, waardoor de knikker kan verdwijnen.
De volgende dwarsdoorsnede laat zien, wat er met een knikker in de machine kan gebeuren:



⟶ de ingeworpen knikker bereikt het eind van de machine.
Een prijs is gewonnen!

⟶ de ingeworpen knikker verdwijnt door een gat en rolt terug naar het begin van de machine.

Met de beschikking over een schema van het inwendige van de machine worden tijdens de eerste les de volgende problemen aan de orde gesteld:

a Een klassegesprek vindt plaats naar aanleiding van de vragen:
1 Wat verwacht je van dit spel, wanneer je het zelf speelt?
2 Hoe zit het met de exploitant?
b Het nagaan van de verschillende mogelijkheden voor het winnen van een bepaalde prijs.
Het beschrijven van die mogelijkheden met nullen en enen.
Bv. de 'weg' naar de hoofdsprijs kan beschreven worden met 00000.
c Simulatie van het spel.
Bij de 32 met nullen en enen beschreven wegen zijn er precies 5 die tot een prijs voeren, nl. 00010, 00100, 00111, 11001 en 11110.
Honderd vijftallen toevalscijfers worden 'vertaald' in nullen en enen (even/oneven) (zie pagina ...). Het spel wordt met behulp hiervan gesimuleerd. Vastgesteld wordt hoeveel maal een prijs valt bij 100 maal spelen en welke prijzen dit zijn.
d Naar aanleiding van de simulatie onder punt c wordt op het klassegesprek, waarmee de les begon, teruggekomen ter toetsing van de gedane uitspraken n.a.v. het spel.

Een theoretische behandeling zal aan het eind van de lessencylus volgen.

Werkvormen en leersituaties in les 1:

a Klassegesprek ter introductie van het probleem.
b Klassegesprek, waarin wordt nagegaan welke mogelijkheden er zijn.
c Groepswerk. Simulatie van het spel. Vertalen van de toevalscijfers.

d Evaluatie van het groepswerk in klassegesprek. Vergelijking van de resultaten van de verschillende groepen. Terugkoppeling naar a.

4.2 Les 2

Explicitering van het begrip mathematische verwachting

4.2.1 Rekenen met kansen

Bepaling van de kans bij het werpen met één dobbelsteen voor enkele gebeurtenissen en het uitvoeren van experimentjes.

1 Hoeveel malen verwacht je bij 30 worpen een 6 te gooien?
2 Gooi 30 maal en vergelijk met het antwoord op vraag 1.
3 Toepassing van het kansbegrip. Uitdrukken in formulevorm.
  a kans op een 6
  b kans op een even aantal ogen
  c kans op een drievoud

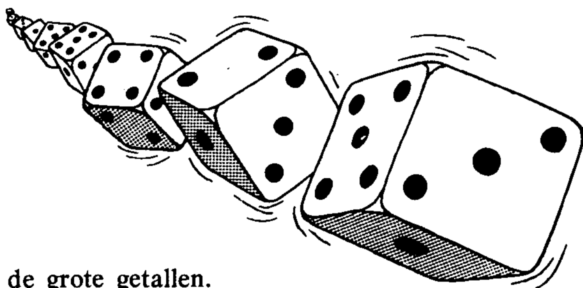
4.2.2 Twee spelen met dobbelstenen

Introduktie van het begrip mathematische verwachting

Het eerste spel:
Twee leerlingen A en B spelen het volgende spelletje. Speler A krijgt 44 punten bij de gebeurtenis (1). Speler B krijgt 10 punten bij de komplementaire gebeurtenis (2,3,4,5,6).

a Wat verwacht je van de puntentotalen na 30 worpen voor speler A en voor speler B?
b Speel het spel met groepjes van 2.
c Vergelijk het antwoord op vraag a met de uitkomst van b.

Inventarisatie van de resultaten van experimentje b vindt plaats onder leiding van de leraar.
In een aansluitende les kan het begrip mathematische verwachting aan de hand van het experimentje b in formulevorm geëxpliciteerd worden. De resultaten van alle groepjes van twee worden *samen* als de uitkomst van een nieuw experiment gezien.

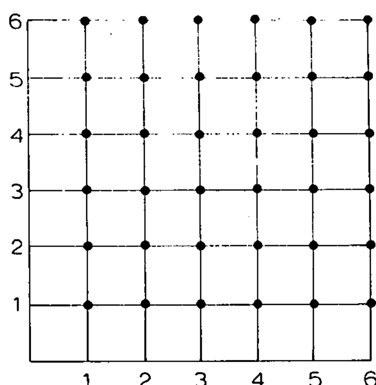


Wet van de grote getallen.

Onderzocht wordt in hoeverre de eerder geformuleerde verwachtingswaarde bij dit uitgebreide experiment benaderd wordt.
Een definitie van verwachtingswaarde wordt hier gegeven. Deze wordt toegepast in experimenten met bijvoorbeeld dobbelstenen, munten, tolletjes, roulettes of combinaties daarvan.

Het tweede spel:
Voorafgaande aan het tweede spel, waarbij geworpen wordt met twee dobbelstenen, vindt een inleiding plaats.
Hierin wordt weer gerekend met kansen bij het werpen met twee dobbelstenen.
De volgende vragen komen ter sprake:

1 Hoeveel uitkomsten (verschillende) zijn er mogelijk bij het werpen met twee dobbelstenen?
   Bespreking van de in vraag 1 bedoelde uitkomstenruimte geeft aanleiding tot het in gebruik nemen van onderstaand roosterdiagram.



uitkomstenruimte bij het werpen
met twee dobbelstenen

2 Hoe groot is de kans op dubbel zes?
3 Hoe groot is de kans op de gebeurtenis: 'de som van het totaal aantal ogen is 3'?
4 Hoe groot is de kans op de gebeurtenis: 'de som van het aantal ogen is 8'?

Nu komt het tweede spel aan bod:
Twee spelers A en B spelen het volgende spel: speler A ontvangt van speler B tien cent als hij met beide dobbelstenen hetzelfde aantal ogen gooit. Speler B ontvangt van speler A tien cent als de uitkomst van de worp met beide dobbelstenen samen 7 ogen is.
a Wat verwacht je van je winstkans als je speler A zou zijn?
b Idem als je speler B zou zijn?

De mathematische verwachting wordt berekend.
Het spel wordt in groepjes van twee gespeeld (20 worpen per speler dus).

Inventarisatie van de groepsresultaten vindt plaats. De resultaten worden getoetst aan de berekende mathematische verwachting. De groepsresultaten worden *samen* opgevat als het resultaat van één groot experiment.
Naar aanleiding hiervàn wordt berekend of dit een nauwkeuriger benadering van de berekende verwachtingswaarde tot gevolg heeft.
Eventueel zouden de vluggere leerlingen hun kennis omtrent de verwachtingswaarde in praktijk kunnen brengen door het volgende (wat gecompliceerdere) spel met twee dobbelstenen te beschouwen:

Jan en Piet spelen een spel met twee dobbelstenen op grond van de volgende afspraak: Jan krijgt het aantal ogen in centen uitgekeerd van Piet, indien dit aantal groter dan of gelijk aan 8 is. In het andere geval betaalt Jan het aantal ogen in centen aan Piet.

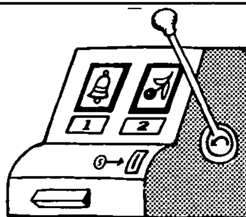
Werkvormen en leersituaties in les 2

a Leergesprek en experimentjes (individueel of in groepen).
b Groepswerk. Spelen van het spel.
c Leergesprek en doceerles. Introductie van het begrip mathematische verwachting.
d Leergesprek. Inleiding op het tweede spel.
e Groepswerk. (groepjes van twee)
f Leergesprek. Klassikale afronding.

4.3 Les 3

Ter evaluatie van het in les 2 geleerde begrip mathematische verwachting, wordt in deze les in groepen (van 3 of 4) het volgende practicum gemaakt:

WAT IS EEN STUIVER WAARD?



Dit is een eenvoudige uitvoering van een gokautomaat, zoals die in vele cafetaria's te vinden is.
Het apparaat heeft twee vensters, 1 en 2, waarachter twee trommels zitten.
Deze trommels kunnen we onafhankelijk van elkaar laten draaien door een ruk aan de handle te geven. Van te voren moeten we dan wel een stuiver in de gleuf werpen (inzet: 5 ct.)
Op elke trommel staan 10 figuren waarvan er één door het venster te zien is.
Een van elke 10 figuren is een appel, [appel], *vier* van elke 10 figuren zijn bellen [bel], en *vijf* van elke 10 figuren zijn kersen [kersen]

▸ 1 Welke zijn nu de combinaties, die we in de vensters 1 en 2 kunnen zien? Vul de eerste twee kolommen van onderstaande tabel aan.

venster 1	venster 2	kans	uitkering
APPEL	APPEL		
APPEL	BEL		

► 2 Hoe groot is de kans dat er een appel verschijnt voor venster 1?

► 3 Hoe groot is de kans, dat er voor *beide* vensters een appel verschijnt?

(Kijk nog eens naar het voorgaande dobbelstenenproblemen).
Vul het antwoord ook in de kolom onder 'kans' van de tabel.

► 4 Vul nu ook de overige kansen in in de tabel.

De machine betaalt alleen uit als voor beide vensters dezelfde figuren te zien zijn (bij appel/bel volgt dus geen uitkering).

De uitkeringen bedragen:

appel,	appel:	50 ct
bel,	bel:	10 ct
kers,	kers:	5 ct

► 5 Vul nu de tabel van de uitkeringen in.

► 6 Bereken nu de *verwachte uitkering* per spel.
Kijk nog eens naar de definitie van het begrip verwachting in het voorgaande.

▶ 7 Als je honderdmaal speelt hoeveel verwacht je dan te winnen of te verliezen?

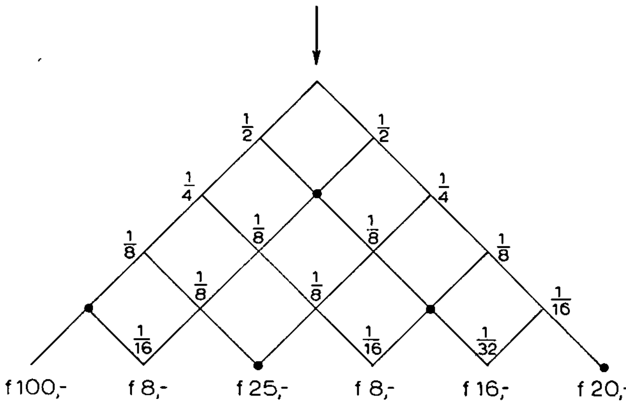
In het laatste gedeelte van de les wordt het practicum klassikaal besproken.

Werkvormen en leersituaties in les 3:

a Groepswerk (practicum)
b Leergesprek. Bespreking van het practicum.

4.4 Les 4

De speelmachine, waarmee deze lessencyclus begonnen werd, komt weer ter sprake. De kansen voor het winnen van de verschillende prijzen worden berekend.
Het volgende overzicht verschijnt op het bord:



De mathematische verwachting (verwachtingswaarde) per inzet wordt berekend.

$$Ex = 0 \times f\,100 + \tfrac{1}{16} \times f\,8 + 0 \times f\,25 + \tfrac{1}{16} \times f\,8 + \tfrac{1}{32} \times f\,16 + 0 \times f\,20 = f\,1{,}50$$

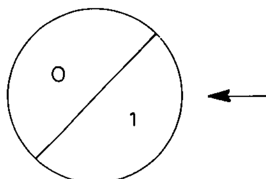
In elk spel mag een speler nu verwachten gemiddeld *f* 0,50 te verliezen (*f* 1,50 - *f* 2,00).
Het spel wordt nogmaals gesimuleerd (of de resultaten van de simulatie van het spel in les 1 worden weer gebruikt).
Nagegaan wordt in hoeverre de berekende verwachtingswaarde per spel overeenkomst met of grote afwijkingen vertoont van de uitkomst van de simulatie.

Werkvormen en leersituaties in les 4:

a Leergesprek. Herintroduktie van het spel (met de machine). Berekeningen van kansen.
b Groepswerk. Berekening verwachtingswaarde. Simulatie. Vergelijking van de resultaten.
c Leergesprek. Inventarisatie en afronding.

N.B.

Tijdens de eerste, zowel als de vierde les zou het spel (met de machine) ook gesimuleerd kunnen worden met de volgende 'Laplacetol':



5 Samenvatting

Op een schoolfeest staat een geheimzinnige speelmachine. De aangegeven prijzen wekken de hoogste verwachtingen, de resultaten stellen teleur.
Een onderzoek van een werktekening, van het inwendige leidt tot het kwantificeren van kansen en het optellen en vermenigvuldigen ervan.
Intuïtief wordt het begrip mathematische verwachting geïntroduceerd.
Aan de hand van overzichtelijke experimenten worden bepaalde wetmatigheden betreffende som- en produktregel vastgelegd. Het begrip *E* wordt geformaliseerd in een practicum over een welbekende fruitautomaat.
Met de geleerde kennis kan nu de in het begin gestelde vraag weer worden opgenomen. De exploitant van de speelmachine blijkt een *I*nnemende, *O*derhoudende, *W*elbespraakte, ... *O*plichter.

Een aanzet tot hypothesetoetsing



1 Achtergrondinformatie

Aan het eind van baken 3 wierpen we een blik vooruit naar een baken, waarin de binomiale kansverdeling een centrale plaats zou innemen. Welnu, in onze haast om de lezer van dit mammoetartikel inzicht te geven in een verticale leerstofplanning, stevenden we (althans in deze verslaggeving) hieraan voorbij. Voor de goede gang van zaken werpen we dan toch nog, vanuit onze vooruitgeschoven positie (bovenbouw v.w.o. en bepaalde richtingen van het h.b.o.) een blik terug naar de onderbouw van het v.w.o.
Het onderstaande schema, waarin een mogelijke route wordt afgebeeld, diene ter oriëntatie.

concrete benadering van de binomiaalformule, o.m. via simulatie ①

② op weg naar de binomiaalformule via bord van Galton (bijvoorbeeld)

$\mathscr{P}(k$ uit $n)$ voor $p = \frac{1}{2}$

binomiaalverdeling voor $p = \frac{1}{2}$
verwachtingswaarde; spreiding; normering

onderbouw

bovenbouw

aanzet tot hypothese toetsing: $p = \frac{1}{2} \rightarrow$ steekproef
steekproef $\rightarrow p = \frac{1}{2}$ ③

binomiaalverdeling voor $p \neq \frac{1}{2}$

schatting p-interval ④

normale verdeling

toepassingen

Voordat we een nadere beschouwing wijden aan dit baken 'Aanzet tot hypothesetoetsing' schetsen we dus enige momenten uit de weg, die hier naar toe leidt. De vraag, of dit onderdelen van bepaalde afgeronde bakens zijn, nemen we niet in bespreking. De mogelijkheid om zekere basiskennis op een andere wijze over te dragen dan op de tot nu toe geschetste wijze, laten we hiermee open.
Voorlopig hebben we ons dus beperkt tot enkele momentopnamen.
Docenten met (statistiek-)ervaring in de -richting v.w.o. en in het h.b.o. zullen deze momentopnamen grotendeels herkennen. We hopen dat de andere lezers echter voldoende aanknopingspunten vinden om de geschetste 'grote lijn' vast te houden.

1.1 Concrete benadering van de binomiaalformule, o.m. via simulatie

Naar aanleiding van de betekenis van bevolkingsstatistieken wordt aan de leerlingen gevraagd om uit hun directe omgeving, voorbeelden te halen van gezinnen met 2 kinderen (niet eigen gezin! waarom niet?).
Het totaal aantal 2-tallen en de verdeling jongens en/of meisjes daarbinnen wordt genoteerd. Een histogram wordt samengesteld.
De 'verwachte' verdeling wordt besproken, mede in verband hiermee.
Vergelijk deze verdeling ook met de algemene situatie via gegevens uit het Statistisch Zakboek van het C.B.S.
Vervolgens wordt deze verwachte verdeling met dobbelstenen of de tabel van toevalsgetallen vergeleken (per leerling 100 getallen, waarbij bijvoorbeeld 0 t/m 4: ♂; 5 t/m 9: ♀. 'Intuïtieve' discussie over afwijking van de verwachting, mede i.v.m. grootte van n.
Met gezinnen van meer kinderen is de concreet-empirische benadering moeilijker ('Waarom?').
We gaan het probleem weer simuleren.

Gezinnen met 3 kinderen:

- Gooi met munt(en) of dobbelste(e)n(en) series van 3 getallen. Maak een afspraak een afspraak over de uitkomst jongen/meisje. (Denk om de gelijke kans voor beide!)
  Verzamel 80 waarnemingen. Stel een histogram op.
  (Kan je van te voren voorspellen hoeveel gezinnen met 3, 2, 1 en 0 jongens ongeveer zullen voorkomen?).

- Simuleer gezinnen met 5 kinderen met de tabel van toevalsgetallen. Verzamel 640 waarnemingen (of veelvoud daarvan).
  Maak een histogram.
  Voorspel — aan de hand van een boomdiagram — van te voren het aantal gezinnen met k jongens; $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

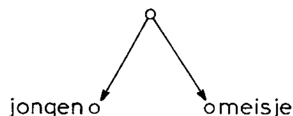
1.2 Op weg naar de binomiaalformule via het bord van Galton (bijv.)

Na deze voorbeelden wordt het bord van Galton als concrete vorm van simulatie gedemonstreerd.

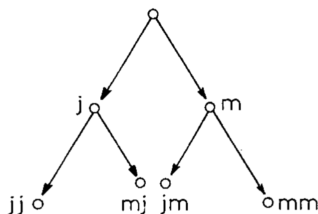
N.B. Met toevalscijfers is Galton weer te simuleren.
Men kan met de leerlingen (ook direct) de isomorfie met de opdrachtskaart uit 1.1 bespreken.

Dit vormt dan tevens uitgangspunt voor een nadere theoretische uitwerking in de richting van het binomium van Newton.
In deze uitwerking komt het volgende moment voor.

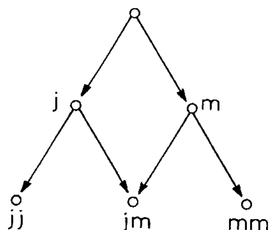
Practicum: 'Het strand van Galtonia'
In het voorgaande werd gesproken over gezinnen met kinderen. Het oudste kind kan een jongen of één meisje zijn en wel met veronderstelde gelijke kansen.



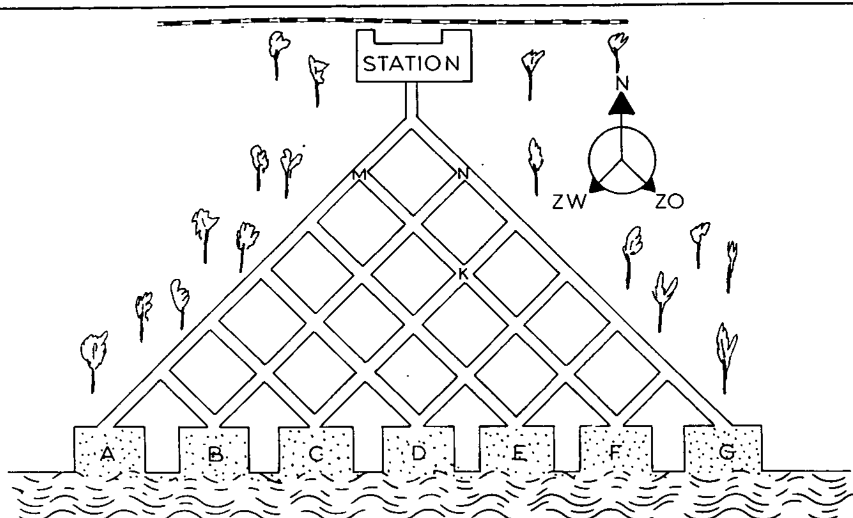
voor het tweede kind geldt hetzelfde.



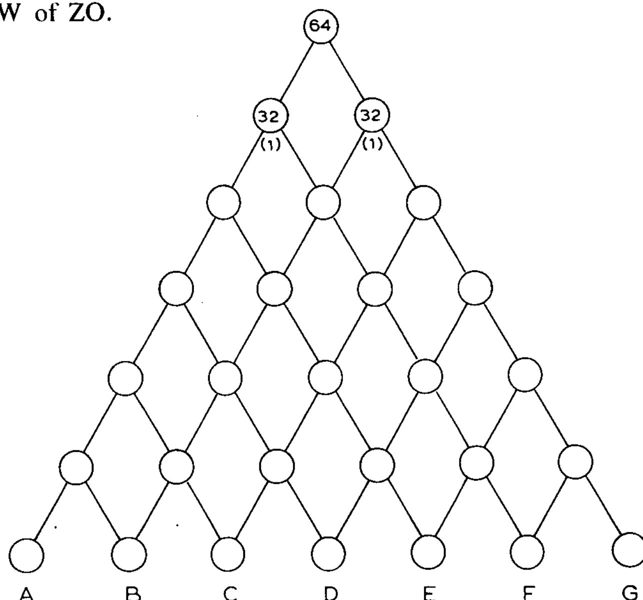
Omdat we geen onderscheid maken tussen een gezin met eerst een jongen en dan een meisje en een gezin dat omgekeerd van kindersamenstelling is, geven we het schema als volgt aan.



Vergelijk dit eens met het volgende verhaaltje.



Aan de zuidkust ligt een badplaats Galtonia, alleen bereikbaar per trein, met bovenstaande plattegrond en 7 strandbaden A t/m G.
Er komen 64 badgasten op het station aan: de badgasten gaan (steeds zuidwaarts) snel naar het strand en bewegen zich bij ieder kruispunt at random naar ZW of ZO.



- ▶Vul bovenstaand 'verwachtingspatroon' aan.
- ▶Schrijf nu op elk horizontaal niveau de *verhoudingsgetallen* op van de aantallen badgasten die de kruispunten passeren. (Herken je die getallen?)
- ▶Tel op niveau *x* per kruispunt, het aantal mogelijke manieren dat je er vanaf het station kunt komen.

▶ | Conclusie (1) De verhoudingsgetallen bij A t/m G kan men interpreteren als |
|---|
| (2) De kansen voor A t/m G om badgasten te ontvangen verhouden zich als |

▶ Om in een strandbad te komen moet men 6 keer kiezen tussen ZW - ZO ($p = 1/2$).

▶ De badgast die vanuit het station A bereikt koos 6 keer ZW! Dat kan maar op één manier!
De kans dat iemand uit het station in A terecht komt is dus [ ]

De badgast die vanuit het station C bereikt, koos 4 keer ZW en 2 keer ZO. Dat kan kennelijk op [ ] manieren. De kans dat iemand uit het station in C terecht komt is dus [15.]

▶ Kansen voor

A	B	C	D	E	F	G

'de kansverdeling voor het zesde niveau'

Afhankelijk van de beginsituatie kan men nu $\mathscr{P}(k$ uit $n)$ gaan bespreken voor $p = 1/2$.
In ieder geval bezitten de leerlingen de mogelijkheid om zulke berekeningen door generalisatie uit te voeren.
Een histogram kan getekend worden en eventueel wordt door simulatie nogmaals de empirische bevinding daarnaast gelegd.
Simulatie biedt — zeker per computer — nu ook de mogelijkheid kansen te bepalen voor grote n, wat tevens aanleiding kan geven tot een gesprek over 'spreiding' en normering van de histogrammen.

2 Beginsituatie en doelstelling

2.1 Beginsituatie

2.1.1 De leerlingen hebben een goed begrip van (kwalitatieve en kwantitatieve) kans.
2.1.2 De leerlingen hebben veelvuldig gewerkt met Laplace-kansen.
2.1.3 De leerlingen zijn gewend gegevens te verzamelen zowel vanuit een concrete situatie, als vanuit gesimuleerde situaties en deze gegevens beschrijvend (statistisch) te verwerken.
2.1.4 De leerlingen kunnen werken met boomdiagrammen en histogrammen.
2.1.5 De leerlingen weten wat gemiddelde en verwachtingswaarde is, en hebben begrip voor hun relatie.

2.1.6 De leerlingen hebben (t.m. in kwalitatieve zin) begrip voor 'afwijking(snormen) van het gemiddelde'.
2.1.7 De leerlingen hebben (t.m. kwalitatieve)ervaring met de wet van de grote getallen.
2.1.8 De leerlingen hebben regelmatig gewerkt met simulatie van kansproblemen.
2.1.9 De leerlingen zijn gewend aan computerverwerking van eenvoudige problemen.

2.2 Doelstelling

Dit baken poogt de leerlingen enig inzicht te bieden in het nut en de mogelijkheden van hypothesetoetsing, m.n.
2.2.1 bij gegeven kans ($p = ½$) steekproeven nemen;
2.2.2 een gegeven kans ($p = ½$) al dan niet verwerpen op basis van een steekproef;
2.2.3 op basis van een steekproef een kansinterval afschatten.

3 **Instappen in de probleemsituatie**

3.1 We kunnen het probleem van de hypothesetoetsing eerst kwalitatief benaderen.
Voorbeeld: (uit H. Freudenthal: Waarschijnlijkheid en Statistiek)
'Volgens statistieken zijn in Londen 82 jaren achtereen meer jongens dan meisjes geboren. Indien de geboorte van jongen of meisje een kanskwestie was, zoals 'kruis' en 'munt', dan was dat onbegrijpelijk. Want een serie van 82 keer achter elkaar 'kruis' bezit de waarschijnlijkheid van ( ) = 2.10 .
Van iets dat een zo geringe waarschijnlijkheid bezit, mag men gevoeglijk zeggen dat het onmogelijk is. En hieruit volgt de onmogelijkheid van de veronderstelling dat het geslacht over het menselijk nakroost wordt verdeeld volgens het toeval van kruis en munt'.

3.2 Voorbeeld:
Naar verwachting zijn op de X-school ongeveer evenveel jongens als meisjes. We willen deze hypothese ($p = ½$) toetsen door een (kleine) steekproef te nemen van 10 leerlingen (Discussie over de wijze van steekproef nemen). We scoren jongen, meisje, resp. door 1,0.

4 **Beschrijving van een stukje onderwijs**

4.1 Aanzet tot hypothesetoetsing
$p = ½ \rightarrow$ steekproef
steekproef $\rightarrow p = ½$?

4.1.1 In een klassegesprek wordt nagegaan of zonder meer van de vooronderstelling $p = 1/2$ bij het inventariseren en simuleren van gezinnen met k kinderen in 1.1 mocht worden uitgegaan.

4.1.2 Kunnen we wellicht uit de *waarneming* afleiden of $p = 1/2$?
We nemen het volgende voorbeeld.
Neem een serie van 10 kinderen (concreet of gesimuleerd).
Geef een jongen aan met 0, een meisje met 1.
Stel we krijgen het volgende resultaat: 1000100100.
Hierin is de fractie meisjes 0,3. Geef dit aan met fr = 0,3.
Hou een diskussie over het al dan niet acceptabel zijn van een dergelijke serie onder vooronderstelling $p = 1/2$.
In deze discussie kunnen we de volgende momenten inbouwen:
a intuïtieve benadering; het afkeuren van de uitspraak inventariseren
Afgekeurd bij fr = 0,0 door.....leerlingen
fr ≦ 0,1 door.....leerlingen
fr ≦ 0,2 door.....leerlingen
fr ≦ 0,3 door.....leerlingen
b een simulatie van series van 10 bij $p = 1/2$ met een tabel van toevalscijfers.
Hierbij kan men (empirisch) het risico van ten onrechte afkeuren bepalen bij gegeven keuringsfractie.

Laat onderstaande tabel invullen door 500 series van 10 te simuleren

fr	afkeurrisiko
< 0,1	
< 0,2	
< 0,3	
< 0,4	
.	
.	
.	

c Overschakelen op gegeven risico (bijv. 5% of 10%).
d Verschil van een- en tweezijdig toetsen.
e Eerste stappen naar theoretische behandeling, evtl. via Galtonia (zie 1.2 van dit baken).

$$\mathcal{P}(\text{fr} = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\mathcal{P}(\text{fr} = 1) = \binom{10}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\mathcal{P}(\text{fr} = 2) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$ enz.

4.1.3

Paprika's - eenzijdige toetsing
een opdrachtskaart (4 leerlingen)

OPDRACHT

De inkoper van een groenten-supermarket heeft ruzie met z'n baas; hij beweert dat de rode paprika's evenzeer in trek zijn als de groene, de baas beweert dat de groene het best in de smaak vallen bij het publiek. De bedrijfsstatisticus brengt uitkomst.
Men spreekt af een steekproef van 20 paprikakopers te nemen en het aantal te tellen dat rode paprika's koopt.
Men vindt elkaar op een risicogrens van 5% en de bedrijfsstatisticus beweert dat er dan hoogstens 5 keer rode paprika's bij mogen zijn, wil de baas gelijk hebben.

a Op de wijze van steekproefnemen is heel wat aan te merken. Probeer met elkaar een paar twijfels te formuleren.

b Welke hypothese wordt getoetst?
Toetst men één- of tweezijdig?

c De inkoper vertrouwt de statisticus trouwens ook maar half. Hij pakt z'n toevalscijfers-boek en neemt snel 200 steekproeven van 20 (of een veelvoud van 100) met de keuringsgrens $\leqq 5$.
Imiteer de inkoper en vermeld je resultaat.
Verzamel resultaten van andere groepen.

d Bereken nu of de statisticus gelijk heeft:

$\mathcal{P}(k = 0) =$	
$\mathcal{P}(k = 1) =$	
$\mathcal{P}(k = 2) =$	
$\mathcal{P}(k = 3) =$	$\mathcal{P}(k < 3) =$
$\mathcal{P}(k = 4) =$	$\mathcal{P}(k < 4) =$
$\mathcal{P}(k = 5) =$	$\mathcal{P}(k < 5) =$

Verdeel de berekeningen onderling!

De computer heeft de fractie voor $p = \frac{1}{2}$ ook bepaald via steekproeven uit de tabel van toevalsgetallen en wel voor de in de tabel genoemde aantallen getallen.

Tabel van resultaten.

4000 series van 10 getallen				2000 series van 20 getallen			
k	aantal	%	berekend perc.	*k*	aantal	%	berekend perc.
0	7	0,18	0,1	0	0	0	0,00
1	34	0,85	1	1	0	0	0,00
2	168	4,2	4,4	2	1	0,05	0,02
3	473	11,81	11,7	3	2	0,1	0,1
4	840	21	20,5	4	7	0,35	0,5
5	993	24,8	24,6	5	24	1,2	1,5
6	821	20,5	20,5	6	80	4	3,7
7	454	11,4	11,7	7	152	7,25	7,4
8	165	4,13	4,4	8	266	13,3	12,0
9	39	0,98	1	9	297	14,85	16,0
10	6	0,15	0,1	10	355	17,75	17,6
				11	325	16,2	16,0
				12	228	11,4	12,0
				13	153	7,65	7,4
				14	69	3,45	3,7
				15	27	1,35	1,5
				16	11	0,55	0,5
				17	3	0,15	0,1
				18	0	0	0,02
				19	0	0	0,00
				20	0	0	0,00

4.2 Steekproeflengte

Door het vergelijken van berekende waarden en simulatiegegevens zijn de leerlingen nogmaals geconfronteerd met de waarde van een grote steekproef (Zeker als de computer gebruikt is). Uit de berekeningen van 4.1.2 en 4.1.3 wordt daar nog aan toegevoegd de scherpere benadering van het afgesproken risikopercentage voor grotere n:

vgl.

$n = 10$ $P(\text{fr} < 0{,}2) = 0{,}011$ $P(\text{fr} = 0{,}2) = 0{,}044$
$n = 20$ $P(\text{fr} < 0{,}2) = 0{,}017$ $P(\text{fr} = 0{,}2) = 0{,}032$

De leerlingen zijn gemotiveerd om keuringsgrenzen voor langere steekproeven te nemen: bijv. $n = 50$, $n = 100$. We kunnen dit niet meer met de hand verrichten. We maken gebruik van de computer (simulatie eventueel en berekening via de formule).

4.3 Andere p.
Een opiniepeiling moet vaststellen:
Is het waar dat 4 op de 5 huisvrouwen vinden dat de markt goedkoper is?
1000 huisvrouwen worden geïnterviewd.
Laat dit met toevalscijfers simuleren (0,1: de markt is niet goedkoper), eventueel met computer.
Laat bepalen bij welke uitslag van de enquête de bewering met een risico 5% (of andere percentages) is af te keuren.
Overgang tot de theorie.

4.4 Intervalschatting voor p.

Hoeveel huisvrouwen vinden de markt goedkoper?
Van 1000 geïnterviewde huisvrouwen vinden 710 de markt goedkoper. Kun je beweren dat 71% van alle huisvrouwen de markt goedkoper vinden? Kun je uitspraken doen zoals: tenminste ...% (ten hoogste ...%) van alle huisvrouwen vinden de markt goedkoper en welk risico is met dergelijke uitspraken verbonden?

4.5 Hier eindigt ons baken abrupt: we menen dat veel materiaal is aangedragen voor de leerlingen, om inzicht te verkrijgen in de waarde van een steekproef t.a.v. (fractie- en) kansvoorspelling. Door het voortdurend simuleren heeft de leerling immers constant steekproeven genomen en mede door (computer-)berekening kunnen ervaren wat een risico van 5% inhoudt.
Hij heeft ervaren wat het betekent een hypothese ($p = ½$) af te wijzen of te accepteren op basis van een steekproef, en welke rol de lengte van de steekproef daarin speelt.
Principiële vragen over fouten van de eerste en tweede soort kunnen aan de orde gesteld worden.
In principe is de leerling in staat om indien hij op basis van de steekproef (bijv.) $p = ½$ afwijst, aan te geven welk p-interval hij wel zou accepteren.

Vele generalisaties moeten nog volgen, zoals
1 de overgang naar de binomiaalformule voor $p \neq ½$
2 de overgang naar de (continue) normaalverdeling.
3 $Ex = np, \sigma x = \sqrt{npq}$.
4 tabel van de normaalverdeling en hantering daarvan
5 systematiek van intervalschatting.

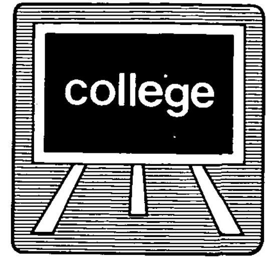
De praktijk moet uitwijzen of de leerling via de hiervoor geschetste (ervarings) werkwijze inderdaad beter is voorbereid op deze generalisaties en vooral hun (concrete) toepassingen.

Hopelijk ook gaat/blijft de computer z'n betekenisvolle rol hier spelen.

5 Samenvatting

Met een voorkennis betreffende de binomiale kansverdeling, het begrip spreiding uit de beschrijvende statistiek, het simuleren van stochastische problemen en de gebruiksmogelijkheid van de computer stappen de leerlingen in dit baken. De problematiek van de steekproefverdeling uit een dichotome populatie (met $p = ½$) leidt daarna tot gebruik van de binomiale verdeling. De kans op het trekken van een bepaalde steekproef uit een bekende verdeling wordt gerelateerd aan de betrouwbaarheid van afkeuringsprocedures. Op dezelfde wijze wordt dan nagegaan wanneer men men een van te voren vastgestelde betrouwbaarheid een hypothese ($p = ½$) kan verwerpen. Eén- en tweezijdige toetsing komen aan de orde, benevens een inzicht in de grootte van de steekproef. Nu wordt de procedure omgekeerd: voorgeschreven risiko en intervalschatting. De computer biedt in korte tijd vrij nauwkeurige gegevens als we hem een simulatie laten uitvoeren.
Inmiddels is het schijnsel van een volgend baken reeds over onze activiteiten gevallen: de normale verdeling komt reeds op diverse manieren in zicht.

Markovprocessen (W II)



1 Achtergrondinformatie

Bij het ontwikkelen van het hierop volgende baken 'Wachttijden' ontstond de behoefte aan een meer concrete vulling van het begrip markov-keten, dat in de beginsituatie aanwezig wordt verondersteld.
Daar het enerzijds hier niet mogelijk is om alle thema's in bakens te beschrijven en het anderzijds nuttig kan zijn, ook de collegevorm in dit hoofdstuk naar voren te brengen, bieden we deze leerstof in de laatstgenoemde vorm aan.

2 Beginsituatie en doelstellingen

Dit onderwerp is bestemd voor de laatste klas van de bovenbouw β en introduceert de markovprocessen met behulp van een eenvoudig probleem. We nemen aan dat de leerlingen vertrouwd zijn met de volgende onderwerpen:
matrix, rijen, kolommen, matrixvermenigvuldiging, macht van een matrix, kolom-vektor.

3 De leerstof

In Tel Aviv bestaat in de regentijd de volgende weersverwachting: als het vandaag droog is, is de kans op droog weer morgen 3/4, als het vandaag regent, is de kans op regen morgen 2/3.
Kunnen we uit deze gegevens de kans bepalen dat een willekeurige dag in deze periode een regendag is?

Schema:

morgen \ vandaag	droog	nat
droog	3/4	1/3
nat	1/4	2/3

We gaan het probleem nu met het volgende model te lijf:
een systeem bezit twee toestanden I en II (in dit voorbeeld: droog en regen) en met de waarschijnlijkheden als bovenvermeld gaat de toestand i (I of II) in de toestand j (I of II) over.

Het is didactisch aan te bevelen, het probleem primitiever — zonder expliciete waarschijnlijkheden — te herformuleren:
Stel dat we een zeer groot aantal van deze systemen hebben (plaatsen als Tel Aviv met dezelfde kansen op een droge of regenachtige dag na een droge respektievelijk regenachtige dag). Op dit ogenblik is een fraktie x_1 in toestand I (bijvoorbeeld: in de helft van de plaatsen is het vandaag zonnig) en een fraktie x_2 in toestand II (in de helft der plaatsen regent het).
Dus $x_1 + x_2 = 1$. We kunnen de overgang als volgt beschrijven:

van de systemen in toestand I blijft $\frac{3}{4}$ in deze toestand terwijl $\frac{1}{4}$ verandert
van de systemen in toestand II blijft $\frac{2}{3}$ in deze toestand terwijl $\frac{1}{3}$ verandert.

(Exacter formuleert men dit met voorwaardelijke waarschijnlijkheden).
De nieuwe verdeling over de toestanden noteren we: x_1' in toestand I, x_2' in II met

$$x'_1 = \tfrac{3}{4} x_1 + \tfrac{1}{3} x_2$$

$$x'_2 = \tfrac{1}{4} x_1 + \tfrac{2}{3} x_2 .$$

Met matrices
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(Schijnt de zon vandaag in de helft der plaatsen ($x_1 = \frac{1}{2}$ en $x_2 = \frac{1}{2}$) dan is de fractie van plaatsen met zon morgen groter, namelijk 13/24.)
Na de tweede overgang krijgen we de verdeling x''_1 in I, x''_2 in II, met

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Na de n-de overgang is een fraktie $x_1^{(n)}$ in I, $x_2^{(n)}$ in II:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Voor grote n wordt dit een enorme berekening. Beschouw daarom eens de speciale éénkoloms matrices (we noemen ze vektoren)

$$e = \binom{4}{3} \qquad \text{en} \qquad f = \binom{1}{-1}$$

Pas $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ hierop toe.

Dan $Pe = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = e .$

$$Pf = \tfrac{5}{12} f .$$

Dus (ga na!) $P^2 e = P(Pe) = Pe = e , \ldots , P^n e = e$

$$P^2 f = P(Pf) = P\,\tfrac{5}{12} f = \tfrac{5}{12} Pf = \tfrac{5}{12}^2 f, \ldots\ldots$$
$$P^n f = \tfrac{5}{12}^n f.$$

De gegeven vektor $\binom{x_1}{x_2}$ kun je schrijven als

$$\binom{x_1}{x_2} = \tfrac{1}{7}(x_1 + x_2)e + \tfrac{1}{7}(3x_1 - 4x_2)f.$$

Dus (ga na!)
$$P^n\binom{x_1}{x_2} = \tfrac{1}{7}(x_1 + x_2)e + \tfrac{1}{7}(\tfrac{5}{12})^n (3x_1 - 4x_2)f.$$

Hierin is $x_1 + x_2 = 1$, dus

$$P^n\binom{x_1}{x_2} = \tfrac{1}{7}\binom{4}{3} + \tfrac{1}{7}(\tfrac{5}{12})^n (3x_1 - 4x_2)f.$$

Voor grote n heeft de tweede summand niets te betekenen; dan wordt

$$P^n\binom{x_1}{x_2} \approx \tfrac{1}{7}\binom{4}{3} = \begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\ \frac{3}{7}\end{pmatrix}.$$

Dit betekent dus dat de situatie zich op den duur stabiliseert: een fractie $\frac{3}{7}$ van een aantal systemen (plaatsen) bevindt zich in toestand II (het regent er). Dit betekent dan voor één systeem Tel Aviv, dat de kans op regen $\frac{3}{7}$ is.

Met behulp van de vektoren e en f is dit probleem nu opgelost, maar hoe zijn we aan die vektoren gekomen?
We hebben gezocht naar getallen λ en naar vektoren $\binom{y_1}{y_2}$ zo dat

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\binom{y_1}{y_2} = \lambda\binom{y_1}{y_2}.$$

Wanneer $e = \binom{4}{3}$ en $f = \binom{1}{-1}$ worden ingevuld voor $\binom{y_1}{y_2}$ dan blijken bovenstaande vergelijkingen inderdaad in gelijkheden over te gaan voor $\lambda = 1$ resp. $\lambda = \frac{5}{12}$ Dat dit bijzondere vektoren zijn is te zien, wanneer we een willekeurige andere vektor nemen, bijv.

$$\binom{1}{2}.$$

Nu blijkt er geen getal λ te vinden te zijn die de vergelijkingen in gelijkheden doet overgaan.
Men vindt e en f door eerst de bijbehorende λ's te bepalen op de volgende wijze:

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\binom{y_1}{y_2} = \binom{\lambda y_1}{\lambda y_2},$$

dus
$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\tfrac{3}{4} - \lambda) y_1 + \tfrac{1}{3} y_2 = 0$$

$$\tfrac{1}{4} y_1 + (\tfrac{2}{3} - \lambda) y_2 = 0 \;.$$

Voorwaarde voor een niet-triviale oplossing is

$$\frac{\frac{3}{4} - \lambda}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - \lambda}$$

of $(\frac{3}{4} - \lambda)(\frac{2}{3} - \lambda) = \frac{1}{12}$.

Of met determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda^2 - \tfrac{17}{12}\lambda + \tfrac{5}{12} = 0)$$

dus $\lambda = 1$ of $\frac{5}{12}$

Bij $\lambda = 1$ hoort als oplossing $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = e$

en bij $\lambda = \dfrac{5}{12}$ hoort f.

We noemen λ een *eigenwaarde* van de matrix P.

Was het van te voren te voorspellen dat 1 als eigenwaarde zou optreden?

In elke kolom van P is de som 1. (Waarom moet dit zo?)
Dus $(1, 1)P = (1, 1)$
Dus (gespiegeld)

$$P' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dus is 1 eigenwaarde van P' terwijl P' en P dezelfde eigenwaarden hebben.

Wat omtrent de overige eigenwaarden?

Zij $Px = \lambda x$,
dus
$$p_{11} x_1 + p_{12} x_2 = \lambda x_1$$
$$p_{21} x_1 + p_{22} x_2 = \lambda x_2.$$

Dus
$$|\lambda| . (|x_1| + |x_2|) = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| = |p_{11} x_1 + p_{12} x_2| + $$
$$+ |p_{21} x_1 + p_{22} x_2| \leqslant p_{11} |x_1| + p_{12} |x_2| + p_{21} |x_1| +$$
$$+ p_{22} |x_2| = |x_1| + |x_2|$$

waaruit volgt

$$|\lambda| \leqslant 1 .$$

Dezelfde redenering kan voor elke stochastische matrix P worden gehouden, d.w.z. voor een n-bij-n matrix met niet-negatieve coëfficiënten en in elke kolom de som 1. Deze matrices hebben alle eigenwaarden absoluut $\leqslant 1$ en tenminste één gelijk aan 1.

In 't algemeen zal er precies één eigenwaarde $= 1$ zijn en de anderen absoluut $\leqslant 1$. Dan krijgt men dus de situatie dat de verdeling over de diverse toestanden naar een evenwicht convergeert.
De verhoudingen in 't evenwicht worden door de eigenvektor bij eigenwaarde 1 bepaald.

Het Tel Aviv-probleem is een voorbeeld van een markovproces. Een markovproces kan worden omschreven als een systeem dat verschillende toestanden heeft (in het bovenstaande twee: regen of droog) met een matrix van overgangswaarschijnlijkheden.

Wachttijden



1 Achtergrondinformatie

1.1 tekst bestemd voor	: leraren eerste graad
1.2 les bestemd voor	: leerlingen wiskunde-II (keuzeonderwerp)
1.3 behandeling van	: gedeelte waarschijnlijkheidsrekening en statistiek
1.4 werkwijze	: a benadering door middel van simulatie b exact.

2 Beginsituatie en doelstelling

Bekend verondersteld	: toevalscijfers, markovketens*, matrices, exponentiële funkties, differentiaal- en integraalrekening
in te voeren nieuwe onderwerpen	: poissonprocessen.

3 Instappen in de probleemsituatie

Kaleidoskoop

18.00 u. Nieuwsbericht: Op Rijksweg 12 beweegt zich een 20 km lange file van Maarsbergen tot Ouderijn westwaarts met een snelheid van 10 km per uur.
22.30 u. Nieuwsbericht: De file op Rijksweg 12 is thans opgelost.

31 oktober 1971: Gisteren vormde zich op het stadhuis een file van plm. 400 personen die voor de a.s. legesverhoging hun paspoorten wilden vernieuwen.

Op de hoek van de Breestraat kom ik nooit in één keer door het groene licht, maar gisteren gebeurde het me voor 't eerst dat ik het vijf keer voorbij moest laten gaan.

* zie ook het hiervoor gegeven college.

Dat gebeurt ook niet vaak dat alle drie stoelen tegelijk vrij komen. Wie is aan de beurt?

Ga jij in die rij staan en ik hier — wie het eerst aan de beurt is, neemt twee retour Eindhoven.

Op het Amsterdam-Rijn-kanaal bij Utrecht passeert overdag per minuut gemiddeld een boot. Zou het bijvoorbeeld kunnen gebeuren, dat er 10 minuten lang geen boot langs kwam?

Bel 008
... er zijn 12 wachtenden voor u ... er zijn 10 wachtenden voor u ... er zijn 9 wachtenden voor u ...
Hoe zouden we kunnen vaststellen hoeveel er per 10 seconden bijkomen? Draai even 008 op de andere stadslijn. Tuut tuut tuut ...

4 Beschrijving van een stukje onderwijs

Problemen

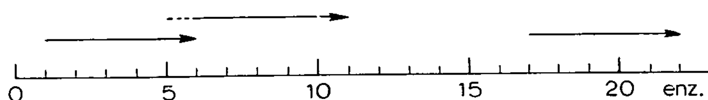
Welk soort problemen doen zich in de kaleidoscoop voor en hoe zou men ze mathematisch kunnen behandelen?
Bij een loket ontstaat uit een patroon van aankomst en een mogelijkheid van service een patroon van afvloeiing dat we wensen te beheersen. Dit is gemakkelijk als aankomst en service regelmatig zijn: de aankomsten in gelijke afstanden en de service op gezette tijden en van vaste duur. Is aankomst of service zo maar onregelmatig dan valt er nauwelijks iets te beheersen. Dit is wel het geval als aankomst of service aan het pure toeval onderworpen zijn.
Wat bedoelen we hier met 'puur toeval'? Van de boten op het Amsterdam-Rijn-kanaal passeert er gemiddeld één per minuut. Niet regelmatig maar per toeval. Ik gooi om de 10 seconden een dobbelsteen op; vertoont die een zes dan komt er een boot; zo niet, dan komt er geen. Zou het kunnen gebeuren dat er tien minuten lang geen boot kwam? In tien minuten is het 60 keer dobbelen. Hoe groot is de kans van in 60 keer dobbelen geen zes? Vergis u niet, de kans is niet zo verschrikkelijk klein. De kans op een keer geen zes is $1 - \frac{1}{6}$, die op 60 keer geen zes is $(1-\frac{1}{6})^{60} \backsim e^{-10} \backsim 10^{-4}$, dus gemiddeld ... keer per jaar?
Aankomst en *service* kunnen *regelmatig* of *toevallig* zijn — dit geeft vier mogelijkheden. Toeval is geen blanco situatie, er moet iets gegeven zijn: de dichtheid van aankomst (α per tijdseenheid) en de dichtheid van service (β per tijdseenheid). Mathematisch kan zo'n probleem *discreet* of *continu* worden behandeld — terwijl de boten op willekeurige tijden aankomen, is er in het parallel van de dobbelsteen precies om de 10 seconden geworpen voor al of niet een zes. Bij 008 komen er continu wachtenden bij of worden geholpen, maar de stem, die de stand van zaken opgeeft, klinkt maar om de 5 seconden.

Bij de eenvoudigste wachttijdproblemen speelt de service geen beperkende rol. Er is genoeg service zodat iedereen direct wordt geholpen; wat je dan interesseert is hoe groot de kans is dat je een bepaalde tijd op een klant moet wachten. Het probleem van het Amsterdam-Rijn-kanaal is van dit soort — de enige 'service' die ik aan de file boten verleen is dat ik ernaar kijk.
Veel moeilijker is het volgende: aankomst volgens toeval, service volgens vaste regel. Hieronder valt bijv.: Auto's passeren volgens toeval, een per tien seconden; op een bepaald punt worden ze gedwongen afstand van vijf seconden te houden; er ontstaan files; hoe lang kunnen ze worden en hoe snel lossen ze op?
Schijnbaar nog moeilijker, maar in werkelijkheid minder moeilijk: Auto's passeren volgens het toeval, een per 10 seconden, bij een controlepost, waar ze gemiddeld één per 5 seconden worden geholpen. Er ontstaan rijen van wachtenden; hoe lang hoe vaak?
Het kan nog gecompliceerder: meer dan een doorlaatpost, auto's met verschillende snelheid, voorrangswegen waar je op grote lacunes moet wachten om in te voegen, verkeerspleinen met of zonder stoplichten, verschillende rijdisciplines ('wie het eerst komt, maalt het eerst' of bepaalde voorrang). In al die gevallen kan men mathematische theorieën ontwikkelen, maar de vergelijkingen zijn vaak ook met computers niet zo eenvoudig exact op te lossen. Een uitkomst is dan:

Simulatie

Toen we het Amsterdam-Rijn-kanaal door een dobbelsteen vervingen, zetten we een simulatie-model op. Er ontbrak alleen nog aan, dat we werkelijk aan het dobbelen sloegen.
Dobbelen is onhandig. Simuleren wordt handiger beoefend met toevalscijfers. Een gebeurtenis met kans $\frac{1}{10}$ simuleer je door de opkomst van een 0 in de rij toevalscijfers; één met de kans $\frac{1}{4}$ door de opkomst van 0,1, . . . ,24 in de rij van de 00, . . . ,99 in de lijst van toevalcijfers. Voor de kans $\frac{1}{3}$ let je op de 1,2,3 tussen de 1,2,3,4,5,6,7,8,9 terwijl je de 0 in 't geheel niet meetelt.
Van het simuleren geven we nu enkele voorbeelden. Later komt van eenvoudige problemen de mathematische behandeling.
Bij Inlichtingen (tel 008) komen per tijdseenheid gemiddeld 0,1 aanvragen; de afwerking van een aanvraag duurt precies 5 tijdseenheden.

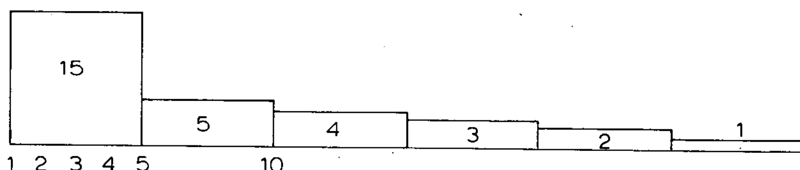
Het gebeuren is gesimuleerd met toevalscijfers: een 0 betekent: een klant belt op. De nullen kwamen op de plaatsen 1,5,17,23,24,26,33, . . .
Dit geeft aanleiding tot onderstaand schema; begin van de pijl betekent 'opgebeld', het schema laat zien hoeveel wachtenden er zijn — de klant die bediend wordt, wordt onder de wachtenden gerekend.



Hetzelfde vindt men in onderstaande tabel.

klantennr.	interval tussen aankomsten	aankomst tijd	service tijd	klaar op	wacht tijd	file voor aankomst v.d. klant	leeg loop service
1	1	1	5	6	5	0	1
2	4	5	5	11	6	1	0
3	12	17	5	22	5	0	6
4	6	23	5	28	5	0	1
5	3	26	5	33	7	1	0
6	11	37	5	42	5	0	4
7	16	53	5	58	5	0	11
8	3	56	5	63	7	1	0
9	22	78	5	83	5	0	15
10	47	125	5	130	5	0	42
enz.							

Het interval tussen opeenvolgende auto's (of nullen), dat theoretisch een gemiddelde 10 moet hebben, loopt nogal uiteen. We maken een histogram van de voorkomende intervallengten en hun frekwenties bij 30 aankomsten.



Kunnen we er theoretisch iets over zeggen?

Verdeling van wachttijden — discreet

We observeren een toevalsgebeurtenis die gemiddeld één keer om de T tijdseenheden plaats vindt. Voor 't gemak veronderstellen we dat hij zich maar op gezette tijden met afstand τ mag voordoen. De kans dat hij zich dan voordoet is

$$p = \frac{\tau}{T}$$

Stel

$$q = 1 - p.$$

1 De kans op een wachttijd $i\tau$ voor een gebeurtenis is dezelfde als op i-1 keer 'niet' en dan 'wel', dus $q^{i-1}p$.

2 De verwachtingswaarde van de wachttijd is

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\tau q^{i-1} p = \tau \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}(1-q) = \tau\left(\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} - \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i}\right)$$
$$= \tau(1 + q + q^2 + \cdots)$$
$$= \tau/(1-q) = \tau/p = T.$$

3 De kans op 'niet' in een tijdvak $t \leqslant x\tau$ is q^x.
4 De kans op 'ten minste één keer' in een tijdvak $t \leqslant x\tau$ is $1 - q^x$.
Het laatste is ook als volgt te vinden:

$$\sum_{i=1}^{x} q^{i-1} p = \sum_{i=1}^{x} (q^{i-1} - q^{i}) = 1 - q^x .$$

Verdeling van wachttijden — continu

Voor een mathematische behandeling is de discrete aanpak niet noodzakelijk. Een andere wijze van redeneren is als volgt:
De kans dat de gebeurtenis zich in een tijdsinterval t niet voordoet, is een functie van t, zeg $\phi(t)$. Het gebeuren in twee disjuncte intervallen ter lengte t_1 resp. t_2 wordt als onafhankelijk aangenomen. De produktregel zegt dan dat de kans op 'niet' in alle beide intervallen, $\phi(t_1)\ \phi(t_2)$ is. Die is dezelfde als de kans op 'niet' in de tijd $t_1 + t_2$, dus per definitie

$$\phi(t_1 + t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2) \qquad (*)$$

(Ook als volgt in te zien: Beschouw een groot aantal, N, aaneengesloten intervallen ter lengte t_1 resp. t_2; ongeveer bij een fractie $\phi(t_1)$ zal het 'niet' in het eerste interval zijn en van deze zal een fractie $\phi(t_2)$ ook 'niet' in 't tweede interval hebben, dus $N\phi(t_1)\phi(t_2)$ hebben 'niet' over het interval ter lengte $t = t_1 + t_2$ Dit is anderzijds $N\ \phi(t_1 + t_2)$ Uit (*) volgt door inductie

$$\phi(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = \phi(t_1)\phi(t_2)\ldots\phi(t_n). \quad (^*_*)$$

Neem $\phi(1) = a$ en $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$. Dan volgt uit $(^*_*)$

$$a = (\phi(\tfrac{1}{n}))^n ,$$

$$\phi(\tfrac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}} , \qquad (^{\ *}_{**})$$

Neem $t_1 = t_2 \ldots = t_n = \frac{1}{m}$. Dan volgt uit $(^*_*)$ en $(^{\ *}_{**})$

$$\phi(\tfrac{n}{m}) = a^{\frac{n}{m}} .$$

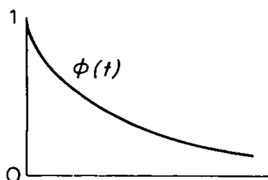
Omdat ϕ een monotoon afnemende functie moet zijn (de kans op 'niet' wordt bij toenemende t kleiner) is ϕ door het voorafgaande uniek bepaald voor alle t en wel

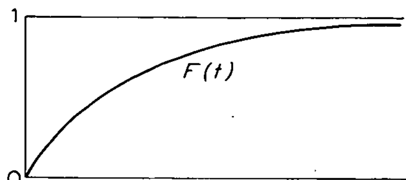
$$\phi(t) = a^t$$

met vaste $a < 1$ (vergelijk dit met uitkomst 3 van de discrete behandeling) Dit laat zich ook schrijven:

$$\phi(t) = e^{-\alpha t}$$

met een $\alpha > 0$.





$\phi(t)$ = kans op 'niet' in de tijd t,
$F(t) = 1 - \phi(t)$ kans op 'wel' in de tijd t.

De kans dat de gebeurtenis zich na $t = 0$ voor 't eerst in het interval t tot $t + h$ voordoet, is

$$F(t+h) - F(t) = e^{-\alpha t}(1 - e^{-\alpha h}).$$

$$\frac{1}{h}(F(t+h) - F(t)) = \frac{1}{h} e^{-\alpha t}(1 - e^{-\alpha h})$$

convergeert voor $h \to 0$ naar

$$F'(t) = \alpha \,.\, e^{-\alpha t}$$

wegens

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(1 - e^{-\alpha t}) = \alpha.$$

(Denk om $e^{-\alpha h} = 1 - \alpha h + \ldots$.)

$$f(t) = F'(t) = \alpha e^{-\alpha t}$$

is de kansdichtheid. Op termen van hogere orde na is de kans op een gebeuren tussen t en $t + \Delta t$:

$$f(t)\Delta t.$$

De *verwachtingswaarde van het aantal gebeurtenissen* in de tijd t is

$$\sum_{i=0}^{\infty} i\, e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^i}{i!} = \alpha t;$$

α is dus de verwachtingswaarde van het aantal gebeurtenissen per tijdseenheid. Bij een gebeurtenis die zich gemiddeld één keer per T tijdseenheden voordoet is

$$\alpha = \frac{1}{T}$$

De *verwachtingswaarde van de wachttijd* is

$$\int_0^\infty t\, f(t)\, dt = \alpha \int_0^\infty t\, e^{-\alpha t} dt.$$

Door

$$\frac{d}{dt}(t\, e^{-\alpha t}) = e^{-\alpha t} - \alpha t\, e^{-\alpha t}$$

met

$$\frac{d}{dt} e^{-\alpha t} = -\alpha e^{-\alpha t}$$

te combineren krijgt men voor de integraal

$$\left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} - t\, e^{-\alpha t} \right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

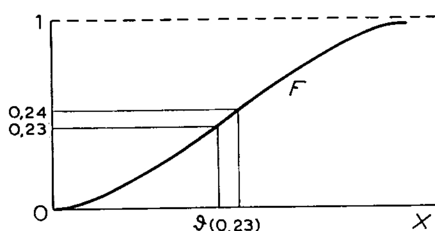
Bij een gebeurtenis die zich gemiddeld een keer per T tijdseenheden voordoet wordt dus de gemiddelde wachttijd, zoals te verwachten viel, T.

Opnieuw simuleren.

Nu we weten hoe de aankomsttijden theoretisch verdeeld zijn, kunnen we ons het simuleren vergemakkelijken. Stel in 't algemeen een grootheid x met een continue kansverdeling zo dat

$$\mathscr{P}(x \leqslant t) = F(t)$$

en F monotoon en continu is. De inverse functie van F zij ϑ



Ik lees de kansen op de vertikale as af. Aan gelijke intervallen op de vertikale as beantwoordt dezelfde waarschijnlijkheid, bijv. aan een interval ter lengte 0,01 de waarschijnlijkheid 0,01. Ik pik een getal tussen 0 en 1 zoals 0,23, dus feitelijk het interval 0,23 tot 0,24, maa lees op de horizontale as de bijbehorende waarde ϑ (0,23) af.

Zodoende verkrijg ik op de gewenste wijze verdeelde toevalsgetallen.

Voor onze exponentiële verdeling krijg ik dus toevalsgetallen als ik getallen $u = 0{,}00$ tot 0, 99 volgens toeval kies en een lijst maak van de bijbehorende

$$-\frac{1}{\alpha} \log_e (1-u) .$$

Als volgt een voorbeeld van zo'n lijst toevalsgetallen ($\alpha = 1$) .

0.22	2.53	1.16	0.55	0.14	0.19	0.92	0.94
2.46	0.20	1.19	0.19	0.12	0.25	0.91	1.40
0.56	2.31	0.98	0.51	1.49	2.40	5.60	1.01
1.01	0.36	3.11	0.01	0.72	0.57	1.82	1.53
0.73	1.17	2.65	3.80	0.07	0.89	2.06	0.12
0.01	1.52	5.41	0.61	1.02	3.25	0.07	0.39
0.25	5.78	0.17	1.34	0.69	0.04	2.40	1.05
0.58	0.17	1.98	0.77	0.25	2.15	1.48	0.36
0.09	1.71	0.52	0.29	1.15	0.25	0.64	0.22
1.31	0.16	1.61	0.17	0.51	1.80	1.97	2.40
0.31	0.07	0.26	0.42	2.21	0.01	0.85	1.01
0.89	0.08	0.08	0.27	0.58	0.33	1.76	0.47
0.05	1.87	0.03	0.77	0.07	2.64	0.12	1.37
1.68	1.83	0.54	0.74	0.31	0.15	0.04	0.46
0.38	2.20	1.99	0.51	1.99	0.66	0.08	0.29

4.51	3.01	1.65	0.90	0.64	0.58	1.53	0.63
0.68	4.05	2.20	0.65	1.98	0.38	2.47	0.96
0.76	0.26	0.81	0.92	0.05	0.04	1.81	0.98
0.70	0.45	0.09	3.75	2.11	0.32	0.25	1.46
2.24	0.64	1.05	2.40	1.10	2.52	1.05	1.26
1.90	0.02	0.26	0.29	6.30	6.00	0.10	0.79
0.13	0.36	0.13	0.40	0.32	0.75	2.72	1.03
1.43	1.86	0.11	2.00	4.03	0.05	0.02	0.77
0.86	0.73	1.49	1.54	0.31	0.29	0.08	0.14
0.55	3.29	2.32	0.46	0.20	0.29	1.35	2.55

We gaan hiermee het probleem van toevallige aankomst- en toevallige servicetijden simuleren. Gemiddeld komt er een klant per 3 tijdseenheden ($\alpha = 1/3$) en gemiddeld kan er een per 2 tijds-eenheden worden geholpen ($\alpha = 1/2$). Simulatie met exponentiële toevalsgetallen leidt tot een tabel zoals:

klanten nr.	interval tussen twee aankomsten*	aankomst tijd	service tijd**	klaar op	wacht-tijd	file	leeg-loop
1	0.66	0.66	1.88	2.54	1.88	0	0.66
2	7.38	8.04	2.80	10.84	2.80	0	5.50
3	1.68	9.72	2.02	12.86	3.14	1	0
4	3.03	12.75	3.06	15.92	3.17	1	0
5	2.19	14.94	0.24	16.16	1.22	1	0
6	0.03	14.97	0.78	16.94	1.97	2	0
7	0.75	15.72	2.10	19.04	3.34	3	0
8	2.74	18.46	0.72	19.76	1.32	1	0
9	etc.						

* getallen uit de eerste kolom (×3)

** getallen uit de laatste kolom (×2)

Mathematische behandeling

Een telpost langs de autoweg, waar het verkeer wordt geteld.
Als een auto passeert, verspringt de teller een eenheid.
De gebeurtenis van het verspringen van i naar $i+1$ wordt met $i \to i+1$ aangeduid. Het verkeer passeert met een gemiddelde frekwentie α per tijdseenheid. De autoweg kan het gemakkelijk verwerken: de auto's bewegen 'onafhankelijk.' We weten al dat de tijden nodig voor verspringen exponentiëel zijn verdeeld, dwz.

$$\mathscr{P}(i \to i+1 \text{ in tijdvak } t) = 1 - e^{-\alpha t}.$$

Je kunt dit ook zo interpreteren: je beschouwt vele autowegen met gelijksoortig verkeer en telposten, start overal op de tijd 0 met de tellerstand 0 en constateert op elk tijdstip t hoeveel er nog in de toestand 0 (op stand 0) zijn. Deze fractie is $e^{-\alpha t}$, terwijl de fractie van die de toestand 0 achter de rug hebben, $1 - e^{-\alpha t}$ is.

We gaan ons nu ervoor interesseren, hoeveel tellers na de tijd t de toestand i aanwijzen, of anders gezegd, hoe groot de waarschijnlijkheid van toestand i na verloop van tijd t is.

$$\mathscr{P}(i \to i+1 \text{ in tijdvak } \tau) = 1 - e^{-\alpha\tau} \sim \alpha\tau$$

waarbij de '$\sim$' ipv. '=' betekent: op termen van de orde τ^2 na. Tevens is voor $j - i > 1$

$$\mathscr{P}(i \to j \text{ in tijdvak } \tau) \sim 0\,.$$

Natuurlijk is voor $j < i$

$$\mathscr{P}(i \to j) = 0\,.$$

Voor het tijdvak τ krijgen we een overgangsmatrix van waarschijnlijkheden volgens het schema

aanvang tijd τ / eind van tijdvak τ	stand i	stand $i+1$	stand $i+2$	...
stand i	$\sim 1-\alpha\tau$	0	0	
stand $i+1$	$\sim \alpha\tau$	$\sim 1-\alpha\tau$	0	
stand $i+2$	0	$\sim \alpha\tau$	$\sim 1-\alpha\tau$	
...				

Aldus:

$$P_\tau \approx \begin{pmatrix} 1-\alpha\tau & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \alpha\tau & 1-\alpha\tau & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & \alpha\tau & 1-\alpha\tau & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \alpha\tau & 1-\alpha\tau & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Om de matrix niet oneindig te laten worden, veronderstellen we dat de teller alleen tot N kan tellen. Dit betekent dat de laatste kolom op de onderste plaats een 1 en voor de rest nullen krijgt.

Op het tijdstip t bevindt de teller zich met de waarschijnlijkheid $x_i(t)$ in de toestand i (of is het aantal tellers in de toestand i een fractie $x_i(t)$ van alle tellers). Op het tijdstip $t + \tau$ is uit de vector $x(t)$ met coördinaten $x_i(t)$ een vector $x(t + \tau)$ geworden volgens

$$x(t+\tau) \approx P_\tau x(t).$$

Nu is $$\frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} = Q\,x(t),$$ op termen van de orde τ na,

waarbij

$$Q = \frac{P\tau - I}{\tau} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha & -\alpha & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha & -\alpha & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

met in de laatste kolom uitsluitend nullen.
We laten nu τ naar 0 gaan:

$$\frac{dx}{dt}(t) = Q\,x(t).$$

We moeten deze vergelijking oplossen. De vector $x(t)$ geeft ons dan alle gewenste informatie: de coördinaat $x_i(t)$ is de waarschijnlijkheid dat de teller na het tijdsverloop t op i staat ($i = 0, \dots, N$). Hierbij speelt een rol de toestand voor $t = 0$, d.w.z. de waarschijnlijkheid, voor $i = 0, \dots, N$, dat op $t = 0$ de teller op i stond. Als begintoestand nemen we $x_0(0) = 1, x_i(0) = 0$ voor $i > 0$.
Om de differentiaalvergelijking op te lossen, stellen we

$$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

waarbij $u(t)$ weer een vector is.

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\alpha e^{-\alpha t} u(t) + e^{-\alpha t} \frac{du}{dt}(t),$$

hetgeen leidt tot $$\frac{du}{dt}(t) = R\,u(t)$$

met als R de matrix $Q + \alpha I$, dus

$$R = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \alpha & 0 & & \text{O} & \\ & \alpha & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \text{O} & & \ddots & 0 & \\ & & & & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

$u(t)$ is nu gemakkelijk stapsgewijs verkrijgbaar

$$\frac{du_i}{dt}(t) = \alpha u_{i-1}(t) \qquad (i < N),$$

dus $$u_i(t) = \frac{(\alpha t)^i}{i!} \qquad (i < N),$$

dus $$x_i(t) = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^i}{i!} \qquad (i < N).$$

Voor $i = N$ is het een beetje anders:

$$\frac{dx_N}{dt}(t) = \alpha x_{N-1}(t),$$

hetgeen we echter niet behoeven op te lossen; we weten in feite dat $x_N(t)$ de resterende waarschijnlijkheid moet zijn, dus

$$x_N(t) = 1 - \sum_0^{N-1} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^i}{i!};$$

we kunnen nu de beperking tot N toestanden laten vervallen door N naar ∞ te laten gaan, hetgeen

$$x_i(t) = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^i}{i!}$$

zonder beperking oplevert. Dat is dus waarschijnlijkheid op tellerstand i na de tijd t. Zij bereikt, zoals men gemakkelijk nagaat, haar maximum voor $\alpha t = i$; tot de tijd $\alpha^{-1} i$ loopt de waarschijnlijkheid op tellerstand i op, om dan af te nemen.

De 'gemiddelde' tellerstand na de tijd t

$$\sum_0^{\infty} x_i(t) \cdot i = \sum_0^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^i}{i!} i = \alpha t$$

is in overeenstemming met onze veronderstellingen over de verkeersdichtheid.

We modificeren het probleem nu ietwat. Het is geen telpost, maar een controlepost, waar de auto's worden doorgelaten met een gemiddelde frekwentie van β per tijdseenheid; de controletijden voor de diverse auto's zijn weer onafhankelijk van elkaar. Om echter opstoppingen te voorkomen, moeten we wel veronderstellen dat $\beta > \alpha$ is. Desniettemin zullen er toevallig rijen van wachtenden ontstaan, die echter tenslotte weer oplossen. Er is een grens, zeg N, voor de lengte van zo'n rij. Wat dan komt wordt definitief teruggestuurd.

Bij de controlepost is er weer een teller. Hij verspringt van i naar $i+1$ als er bij i wachtenden (die waar ze mee bezig zijn, incluis) een auto bijkomt, en van i naar $i-1$ als de controle van een auto beeindigd wordt.

Weer stellen we de vraag: hoe groot is de kans x_i op i wachtende auto's? We hebben nu

$$\mathscr{P}\,(i \to i+1 \quad \text{in tijdvak } \tau) \approx \alpha\tau$$

$$\mathscr{P}\,(i \to i-1 \quad \text{in tijdvak } \tau) \approx \beta\tau$$

$$\text{voor } 0 \leqq i < N \text{ resp. } 0 < i \leqq N.$$

Dezelfde beschouwing als daarstraks leidt tot de overgangsmatrix.

$$P_\tau \approx \begin{pmatrix} 1-\alpha\tau & \beta\tau & 0 & \dots \\ \alpha\tau & 1-(\alpha+\beta)\tau & \beta\tau & \dots \\ 0 & \alpha\tau & 1-(\alpha+\beta)\tau & \dots \\ 0 & 0 & \alpha\tau & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

waaruit

$$Q = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 & . & . & . & . \\ \alpha & -(\alpha+\beta) & \beta & . & . & . & . \\ 0 & \alpha & -(\alpha+\beta) & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \alpha & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & -(\alpha+\beta) & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & \alpha & -\beta \end{pmatrix}$$

en $$\frac{dx}{dt}(t) = Qx(t) \qquad (*)$$

als vergelijking voor de vector $x(t)$ van de waarschijnlijkheden. In plaats van de differentiaalvergelijking (*) helemaal op te lossen, vragen we ons af of de waarschijnlijkheidsverdeling nu niet zoals bij het Tel-Aviv-probleem, stationair wordt.

We zoeken een vector a zodat Qa de nulvector is. Dan is "$x(t)$ constant $= a$" een oplossing van (*) die niet van t afhangt, dus een stationaire kansverdeling.

Zo'n vector a is als volgt te vinden. Stel
$$\frac{\alpha}{\beta} = \rho .$$
Dan heeft a de coördinaten
$$a_i = a_0 \, \rho^i .$$
Rekening houdende met de eis $\Sigma\, a_i = 1$ wordt dit
$$a_i = (1-\rho)(1-\rho^{N+1})^{-1} \rho^i$$
(voor $0 \leqq i \leqq N$).

Als deze kansverdeling over de diverse toestanden (aantal wachtenden) een keer bereikt is, blijft hij onveranderd. Het is in feite zo, dat onafhankelijk van de begintoestand het systeem naar deze stationaire toestand convergeert. Het bewijs hiervoor blijve achterwege.

Men kan nog verdere conclusies trekken:

De waarschijnlijkheid dat een wachtende afgewezen wordt is (in de stationaire toestand) gelijk aan die van de toestand N, dus
$$(1-\rho)(1-\rho^{N+1})^{-1} \rho^N$$
De gemiddelde wachttijd van degenen die wel worden toegelaten, wordt als volgt berekend: Men moet de kans op nummer i in de rij, dus
$$a_i = (1-\rho)(1-\rho^{N+1})^{-1} \rho^i$$
vermenigvuldigen met de verwachte wachttijd van auto's op de i-de plaats ($i + 1$ keer die van een auto op plaats 0), dus met
$$(i+1)\beta^{-1},$$
en dan optellen, dus
$$\Sigma\, a_i (i+1)\beta^{-1}$$
$$= (1-\rho)(1-\rho^{N+1})^{-1} \beta^{-1} \sum_0^N (i+1)\rho^i$$
hetgeen voor $N \to \infty$ wordt:
$$(1-\rho)^{-1} \beta^{-1}.$$
De kans dat de controlepost niets te doen heeft is a_0, dus
$$(1-\rho)(1-\rho^{N+1})^{-1}.$$

Een kans voor de opleiding

1 Enige informatie over de opleiding voor onderwijzer

Het vak 'wiskunde en didactiek' (officieel nog rekendidactiek) kan zich sinds enkele jaren verheugen in een toenemende belangstelling. Voor 1952 lag het accent voornamelijk op de rekenkunde, waarbij de relatie tot het rekenonderwijs op de lagere school zeer onduidelijk was. Na 1952 bepaalde men zich tot het geven van rekendidactiek. De achtergrondkennis en de eigen vaardigheid van de kwekelingen op het gebied van het rekenen moesten nu noodgedwongen ten zeerste verwaarloosd worden. Sinds augustus 1971 wordt aan vele pedagogische academies twee uur per week besteed aan modern wiskundeonderwijs, waarbij het onderwijs op de basisschool (als motiverende beginsituatie en doelstelling) uitgangspunt is voor een verdere verdieping in de stof. Dit betekent dat aandacht besteed wordt aan wiskundeonderwijs op eigen niveau van de student, waarbij alle mogelijke didactische werkvormen, leer- en hulpmiddelen en evaluatietechnieken aan de orde gesteld worden, aan een analyse van het huidige wiskunde(reken)-onderwijs, een aanzet tot een eigen produktie voor de basisschool en aan de praktische vorming van de studenten. Als belangrijk principe hanteren wij de regel dat wiskunde, didactiek, methodiek, psychologie, research en evaluatie in één integraal pakket dienen te worden aangeboden.

Het pessimisme, dat de op de pedagogische academie aankomende leerlingen door een inadekwate vooropleiding — zonder wiskunde in het pakket — ongeschikt zouden zijn om later wiskunde te onderwijzen, delen wij niet. Door deze blanco beginsituatie m.b.t. de wiskundeleerstof is het bovendien mogelijk het wiskundeonderwijs in de bovengenoemde opvatting als integraal geheel van wiskunde en onderwijs met de studenten van meet af aan op te bouwen.

We menen echter dat gedurende de driejarige opleiding tenminste drie uren per week hieraan besteed moeten worden.

Het onderwijsleerplan voor het vak wiskunde op de pedagogische academie is in ontwikkeling. Zo is het de bedoeling dat in de komende jaren een twintigtal leerstofpakketten (blokken) wordt geproduceerd.

Tot op dit moment zijn vier 'blokken' in een eerste versie aan de academies aangeboden. Via de regionale werkgroepen worden deze blokken, die voor het eerste studiejaar bedoeld zijn, geëvalueerd en bijgestuurd. Het betreft de onderwerpen: 'Grafische Verwerking', 'Meten en Benaderen', 'Verzamelingentaal, Tellen en Getallen' en 'Cijferen anno 2000'. Voor het tweede studiejaar zijn de onderwerpen 'Operaties', 'Meetkundige Oriëntatie', 'Spelen en experimenten' en 'Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek' in bewerking.

Via ontwerpacademies en experimenteeracademies wordt dan ook daarvan de eerste versie voor de belangstellende scholen beschikbaar gesteld.
Met dit deel van hoofdstuk 3 willen we u een beeld geven van vorm en inhoud van het onderwijs in 'Wiskunde en Didactiek' op de P.A. met betrekking tot de waarschijnlijkheidsrekening en statistiek.

2 Het blok 'Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening, uit de serie Wiskunde en Didactiek voor de P.A.

2.1 Doelstellingen

De pedagogische academie leidt jonge mensen op voor het beroep van onderwijzer. Een van de belangrijkste onderwijsdoelen binnen deze opleiding betreft dan ook de beheersing van de leerstof van het basisonderwijs, de vaardigheid om deze leerstof over te dragen en de kennis van de gegevens uit informatiewetenschappen, waardoor dit zo efficiënt mogelijk kan geschieden. Bovenstaande impliceert dat de onderwijsdoelen van de P.A. de onderwijs-, leer- en lesdoelen van het basisonderwijs dienen te omvatten. We willen ons hier beperken tot enige leerdoelen voor het genoemde vak op de academie. De operationalisering ervan in termen van leerstofpakketten en toetsen wordt ter discussie gesteld in de volgende fase van de leerplanontwikkeling, waarin de ontwerpacademie een belangrijke plaats zal innemen.
We noemen:
— het verwerven van inzicht in het empirische en theoretische kansbegrip en de relatie er tussen,
— het opdoen van kennis betreffende de combinatoriek,
— het leren gebruiken van beschrijvend statistische methoden en begrippen,
— het leren werken in eenvoudige stochastische modellen en het toepassen ervan in reële problemen,
— het verkrijgen van vaardigheid in het beschrijven van experimenten m.b.v. de taal der verzamelingen,
— het verkrijgen van vaardigheid in het oplossen van problemen m.b.v. de simulatiemethode,
— het opdoen van kennis betreffende het rekenen (optellen en vermenigvuldigen) van kansen,
— het verwerven van kennis van enkele bekende kansverdelingen.

Dit alles in dienst van het verkrijgen van die achtergrondkennis, die nodig is om dit onderdeel van het vak wiskunde in het basisonderwijs op creatieve wijze te kunnen onderwijzen.

2.2 Beginsituatie

De studenten dienen kennis te hebben van het systeem van de rationale getallen en vaardigheid in het uitvoeren van de operaties hier binnen. Nader te noemen begrippen uit de leerpsychologie worden bekend verondersteld. De fasering in de cognitieve ontwikkeling van het kind (volgens Piaget), zoals o.a. behandeld

in de blokken 2 en 3 uit de serie 'Wiskunde en Didactiek', dienen eveneens bekend te zijn.

3 Instappen in de probleemsituatie

In de opleiding van onderwijzers kunnen we de aanvangsproblematiek niet alleen binnen de mathematische aspecten van de belevingswereld vinden, maar (juist) ook binnen de onderwijskundige. In de volgende paragraaf wordt deze gedachte nader uitgewerkt.

4 Een globaal overzicht van de inhoud

De lessen binnen dit blok beginnen met het bekijken van een les in de vijfde klas van de basisschool. Van het – in dit artikel genoemde – derde baken, de toto, is een t.v. opname gemaakt.
Deze opname is vastgelegd op een videoband. De les wordt door de studenten mathematisch-didactisch geanalyseerd. Vanuit de ervaringen, hierbij opgedaan, kunnen de studenten, hopelijk gemotiveerd, in eerste instantie de eigen wiskundige achtergrond gaan opvullen. Dit geschiedt met behulp van een wiskunde practicum. Verschillende activiteiten zoals groepswerk, individuele verwerking, discussie over problemen, korte informatiekolleges en toetsing, stellen de studenten in de gelegenheid nader kennis te maken met een stuk wiskundeonderwijs. De relatie met het werken op de basisschool wordt weer opgevat als het voorgestelde basisprogramma – zie o.a. de bakens 1 en 2 – aan de orde wordt gesteld. Een analyse van enkele videolessen kan hiertoe als introductie dienen. De analyse van leerprocessen is aanleiding tot een nadere studie van relevante gedeelten van de leerpsychologie. In enkele colleges en practica komen o.a. ontwikkelingspsychologische onderzoekingen aan de orde. De 'wiskunde en didactiek'docent kan hier samenwerken met zijn collega voor algemene didactiek. Het onderdeel teamteaching komt nu eventueel in praktische vorm in de opleiding naar voren. Natuurlijk wordt tijdens de colleges en practica zoveel mogelijk gebruik gemaakt van de beschikbare media. Het in studie nemen van het programma voor de basisschool geeft eveneens aanleiding tot het aanpakken van andersoortige onderwijskundige problemen als: diverse vormen van differentiatie, integratie van vakken, uitgaan van de omgeving van het kind, betrokkenheid van de ouders, samenwerking tussen leerkrachten aan één school, verticale leerstofplanning, lessen voorbereiden, e.d.
Met deze voorbereiding kunnen de studenten kritisch reeds bestaand materiaal trachten te analyseren. De aktiviteiten zullen voorlopig slechts gericht kunnen worden op buitenlands materiaal. Daarnaast is het heel nuttig om traditionele rekenmethoden te analyseren in verband met de mogelijkheden die zij impliciet bezitten om de genoemde leerprocessen op gang te brengen (Zie o.a. baken 1).
Door een verdeling van taken binnen en een plenaire verslaggeving voor de hele groep studenten wordt iedere student op de hoogte gesteld van gegevens uit een breed gebied.
Het belangrijkste en moeilijkste deel van het blok kan nu pas aan de orde

gesteld worden: de eigen produktie. Men dient dit onderdeel te beschouwen als een creatieve voortzetting van datgene, wat tot nu toe gedaan is. Hier zullen de studenten op diverse niveaus kunnen werken. Het laagste niveau bereikt men als men een voorgeschreven les in een bepaalde klas kan geven. Het hoogste niveau bereikt de student als hij in staat is om over een bepaald onderwerp een lessencyclus te ontwerpen en deze efficiënt aan een groep leerlingen aan te bieden.

De evaluatie van dit blok is in de eerste plaats gericht op het toetsen van de vorderingen van de studenten. Het gaat hierbij om verschillende zaken:
— eigen wiskundig niveau,
— kennis en vaardigheid in didactische zin,
— praktische vaardigheden en
— eigen produktiemogelijkheid.

5 **Begeleiding van de leraren wiskunde en didactiek**

Om leraar wiskunde en didactiek te worden aan een pedagogische academie heeft men ZONDER MEER genoeg aan een eerstegraads bevoegdheid in het vak wiskunde. Zoals zovaak schuilt ook hier de moeilijkheid in het 'ZONDER MEER'. De bezitters van de middelbare akte hebben, evenals hun collega's die het doctoraal examen aflegden, in hun opleiding geen aanwijzingen gekregen voor het onderwijs op de pedagogische academie. Van de hoop alleen dat men in de nieuwe lerarenopleidingen hieraan wel aandacht zal gaan besteden, kunnen we op dit moment niet leven.
De afdeling Wiskobas is zich dan ook ten volle bewust van de noodzaak van een voortgezette opleiding van de leraren op dit ogenblik. Zo zijn er naast de conferentie in Egmond (zie hoofdstuk 5) een tiental regionale bijeenkomsten van wiskunde- en pedagogiekleraren per cursusjaar gepland. De leiders van deze werkgroepen, die in het algemeen reeds vanaf begin november 1968 meewerken, komen een aantal middagen in Utrecht bijeen om gezamelijk de kadervorming inhoud te geven.

Naast de mondelinge informatie en discussie hierover bestaat de behoefte aan een lerarenboek bij elk blok. Hierin staan de uitgewerkte opgaven, aanwijzingen voor de organisatie van de lessen, suggesties voor aanvullende opdrachten, voorbeelden van te geven colleges, lijsten met materialen en hulpmiddelen, literatuurverwijzingen en te gebruiken toetsen. De betreffende leraren kunnen in alle vrijheid al dan niet van deze lerarenboeken gebruik maken. Ervaringen en ideeën vanuit de praktijk van het onderwijs vullen voortdurend het reeds gegeven materiaal aan.
Vooral leraren, die pas hun loopbaan op de P.A. beginnen, kunnen met vrucht van deze papieren begeleiding profiteren.

Wij spreken de hoop uit dat de gevestigde mening, dat een benoeming aan een pedagogische akademie geen promotie zou betekenen voor een leraar bij het

voortgezet onderwijs langzamerhand aan kracht zal gaan verliezen. Moge dit proces zich snel voltrekken: voor het onderwijs aan aanstaande onderwijzers zouden de beste wiskundeleraren uitverkozen moeten kunnen worden.

We besluiten dit gedeelte van hoofdstuk 3 met het literatuurgedeelte uit het lerarenboek:

WISKUNDE:

voor de docent:

1 H. Freudenthal	Waarschijnlijkheid en Statistiek, Haarlem, 1966
2 Irving Adler	Waarschijnlijkheidsrekening en Statistiek, Aula 295
3 J.R. McCord en R.M. Moroney	Inleiding tot de Waarschijnlijkheidsleer, Aula 328
4 J.G. Kemeny e.a.	Introduction to finite mathematics, Englewood Cliffs, 1956
5 J.M. Sobol	Die Monte-Carlo-Methode, Berlin 1971
6 A.J. Malpas	Experiments in Statistics, Wimbledon, 1969
7 I. Niven	Mathematics of choice, New York, 1965
8 G. Papy	Mathematique Moderne 5, Brussel, 1966
9 M.J. Moroney	Feiten uit Cijfers, Marka 71

voor de student:

1 I. Adler	Probability and statistics for every man, New York, 1963
2 J. Wessels	Rekenen met kansen, Torusreeks 1969
3 D. Huff	How to take a chance, London 1960

WISKUNDE EN DIDACTIEK:

1 Lennart Rade ed.	The teaching of probability and statistics, Uppsala 1970
2 School Mathematics Study Group (S.M.S.G.)	Probability for elementary grades, 1965
3 S.M.S.G.	Probability for intermediate grades, 1965
4 S.M.S.G.	Introduction to probability, 1965
5 Johnson and Rising	Guidelines for Teaching Mathematics, California, 1969

PSYCHOLOGIE:

1 J. Piaget en B. Inhelder	La Genèse de l'idée de hasard chez l'enfant, Paris 1951
2 De Cecco	The psychology of learning and instruction: educational psychology, London 1968

MEDIA EN TECHNOLOGIE:

1 W.P. Janssen	Onderwijstechnologie, Purmerend 1969

2 C.W.H. Erickson	Fundamentals of teaching with Audiovisual Technology, London 1965
3 J. Piaget	filmserie in opdracht van Psychologische Faculteit van de Universiteit Genève, 1960/61
4 I.O.W.O. - videoband	Kwalitatief Kansbegrip, Utrecht 1972 (in voorbereiding)
5 I.O.W.O. - videoband	De Toto, Utrecht 1972 (in voorbereiding)
6 I.O.W.O. - videoband	Op Statistisch Onderzoek, Utrecht 1972 (in voorbereiding)
7 I.O.W.O.	Cijferen anno 2000, Utrecht 1971 (niet in de handel)

ARTIKELEN:

Educational Studies in Mathematics (1969;2), E. Fischbein e.a., Initiation aux probabilités à l'école élémentaire.
Mathematics Teaching 1964 (34), R.D. Harrison, An activity approach to the teaching of statistics and probability.
Journal of structural learning 1969 (1), T. Varga, Combinatorials and probability for young children.
Enfance 1967, E. Fischbein e.a., L'intuition probabiliste chez l'enfant.
Mathematics Teacher 1962 (55), F. Mosteller, Understanding the birthday problem.
Nico 1968 (2), G. Papy, Statistique et vectoriels euclidiens.
Mathematics Teacher 1966 (59), A. Engel, Mathematical Research and Instruction in probability theory.
Mathematics Teacher 1969 (62), J.L. Simon en A. Holmes, A new way to teach probability statistics.

TOEVALSCIJFERS

36 06 46 13 25	09 48 47 41 91	67 84 19 55 21	50 91 77 92 73	88 72 39 04 12
07 25 44 57 45	93 84 57 29 55	15 26 69 92 45	58 35 75 23 89	75 12 47 61 54
02 33 89 14 71	52 02 72 25 35	37 87 44 05 16	12 44 49 48 66	11 92 85 53 37
51 87 11 59 95	20 22 19 05 86	83 24 04 61 26	98 22 47 90 97	87 69 50 48 09
89 72 70 32 02	04 75 48 97 75	40 01 83 62 31	07 88 73 17 20	96 70 57 98 53
94 67 32 91 07	71 49 59 59 91	47 87 85 95 53	46 07 76 82 59	36 54 27 42 77
40 20 54 27 91	89 00 67 90 84	38 00 98 13 70	19 92 81 24 17	71 34 00 88 53
94 52 73 33 96	41 96 69 66 75	56 39 87 31 16	97 48 97 77 46	20 72 59 95 56
86 07 79 95 74	82 02 57 50 23	19 74 72 98 77	17 76 89 99 03	22 32 05 76 83
22 17 48 61 18	01 25 82 30 42	76 06 24 63 95	98 52 87 51 78	00 39 80 65 49
23 17 23 20 75	87 18 04 28 99	21 80 69 36 04	34 70 20 77 76	18 30 97 48 62
24 27 10 67 76	39 87 93 02 76	56 57 64 66 20	15 71 48 22 11	25 06 98 68 69
35 38 80 01 79	44 29 85 66 28	77 39 38 88 10	27 29 86 32 44	71 65 98 92 32
22 63 70 64 07	21 26 88 40 28	98 63 35 73 42	60 49 50 18 91	38 36 27 02 93
04 43 05 32 11	94 39 12 37 38	87 21 17 35 09	98 60 40 65 18	12 50 25 99 16
06 63 30 04 99	83 20 18 44 79	66 41 94 44 93	48 29 35 28 82	49 94 22 01 50
28 28 40 79 08	21 86 42 98 35	05 94 38 66 41	98 37 04 87 99	42 22 62 29 47
30 05 78 69 83	43 68 37 15 73	36 57 33 23 96	43 21 68 17 76	81 18 85 25 94
54 83 43 03 57	78 78 17 89 41	06 99 65 47 75	63 92 29 26 09	11 85 81 53 65
41 61 55 84 94	75 19 63 23 60	06 44 29 77 02	79 41 69 93 61	96 53 45 98 39

06 01 22 15 95	22 23 83 26 29	39 95 50 23 53	87 00 55 83 49	24 76 90 24 80
20 56 94 22 81	07 86 11 61 30	81 70 61 89 74	83 56 28 71 58	81 18 45 40 94
79 51 06 83 63	01 03 56 59 04	26 05 83 06 01	16 51 72 44 99	98 41 73 86 43
69 58 97 33 79	22 16 00 65 91	12 92 55 89 73	19 07 06 41 38	34 73 12 43 45
04 50 94 95 99	48 14 54 12 97	49 86 70 98 56	06 93 58 74 94	55 92 16 91 54

39 93 94 40 33	81 09 23 42 98	56 50 79 19 25	23 07 84 81 05	56 68 68 57 69
17 79 56 31 98	27 97 82 33 62	61 52 59 10 26	70 98 60 39 42	90 75 47 94 86
80 54 04 48 41	05 79 16 40 07	17 26 94 82 80	68 08 09 64 53	37 58 99 36 10
79 86 00 59 48	35 04 48 39 46	04 71 43 88 01	10 41 56 45 66	43 00 83 69 67
14 72 30 79 13	95 96 59 31 70	82 43 92 35 11	16 85 17 53 73	54 82 35 65 82
14 72 30 79 13	95 96 59 31 70	82 43 92 35 11	16 85 17 53 73	54 82 35 65 82

28 45 78 47 60	52 78 55 17 11	83 93 55 20 47	28 22 38 32 06	44 39 10 13 49
42 70 25 26 46	83 22 00 23 87	97 32 26 12 70	55 15 62 88 31	89 23 84 5[illegible] 38
11 84 85 18 88	73 20 07 72 47	66 44 92 10 27	29 17 13 12 33	27 85 59 31 76
26 59 28 19 74	29 90 19 71 19	68 14 07 13 36	01 31 68 09 28	98 60 59 30 31
42 33 03 34 94	42 79 42 13 28	31 77 52 02 05	94 78 45 93 07	65 56 49 47 64

03 83 10 84 20	23 08 20 55 02	87 00 35 28 30	35 16 81 40 12	95 83 80 52 81
02 73 79 02 38	74 75 56 37 47	89 79 16 81 66	75 83 90 36 61	18 45 61 80 48
63 90 04 21 64	59 23 19 69 88	46 31 26 75 55	87 41 93 10 64	90 06 27 26 38
19 74 52 13 57	00 54 60 02 12	63 02 32 30 27	72 98 93 55 13	62 98 93 54 79
15 18 14 82 28	21 77 74 95 64	63 45 16 53 70	68 77 68 19 13	96 91 42 32 97

03 66 02 96 69	92 73 90 78 64	29 95 05 30 38	10 78 48 69 44	01 74 96 98 45
34 18 99 00 10	38 21 44 18 01	88 22 54 59 36	12 99 85 93 51	73 06 46 92 32
88 58 63 52 43	58 32 01 29 25	74 39 96 20 36	64 75 40 85 26	24 04 67 34 33
56 58 69 07 85	85 06 75 95 54	87 11 73 21 18	58 04 97 21 86	75 29 21 16 06
64 81 69 43 66	28 72 33 17 85	44 99 88 90 86	87 48 59 72 99	80 83 81 31 54

90 38 91 52 74	41 90 46 38 82	05 56 03 19 28	84 81 18 28 73	94 77 76 21 89
28 49 79 39 95	30 43 23 12 16	55 99 69 63 48	40 02 15 15 24	84 49 29 40 39
50 87 17 56 96	34 07 37 63 91	41 65 91 70 82	78 29 40 71 59	47 97 64 69 58
35 65 04 30 42	82 42 37 71 93	01 43 95 08 01	48 00 55 88 43	47 12 01 57 23
27 01 05 53 39	60 93 79 14 62	84 06 26 57 43	76 12 15 08 53	67 00 95 81 33

4 Computerkunde en informatica

4.1 *Inleiding*

De CMLW rekende het ook tot haar taak om de ontwikkeling van het onderwijs in computerkunde en informatica te begeleiden en te initiëren.
In april 1968 werd een rapport uitgebracht door de subcommissie computerkunde, waarin de wenselijkheid en mogelijkheid van het invoeren van computerkunde in het onderwijs voor mavo, havo en vwo werden bepleit. Er is daarna een werkgroep gevormd om een experiment voor te bereiden. Een gedeelte van de hierbij ontwikkelde tekst is reeds tijdens het cursusjaar 1968-1969 in de praktijk beproefd, daarna verbeterd en voorts verwerkt tot een leerboekje. Mede vanuit ervaringen aan 13 scholen in het cursusjaar 1969-1970 is de huidige vorm van het leerboek 'Computerkunde 1 en 2' tot stand gekomen.

In 1970 werd besloten om voor het hoger beroepsonderwijs een aparte subcommissie in te stellen (subcommissie voor *w*iskunde en *i*nformatica bij het *h*oger *b*eroepsonderwijs - WIHBO). Deze commissie zal ook de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs binnen het hbo begeleiden. Vanwege het spoedeisend karakter koncentreert men zich allereerst op de informatica.

We volgen hier het inmiddels ontstane gebruik om het leervak binnen het avo aan te duiden met *computerkunde.* Bij het hbo blijven we de term *informatica* gebruiken.

4.2 *Doelstellingen*

Vooral bij de invoering van nieuwe onderwerpen of leervakken, waaronder we computerkunde en informatica toch rangschikken, zullen we ons bewust moeten maken van de doelstellingen die we met ons onderwijs nastreven.
In zeer algemene termen wordt door vele opvoedkundigen een aspect van opvoeding en onderwijs aldus geformuleerd:
'het leren beheersen van de situaties, die men in het leven pleegt te ontmoeten'.
In de televisie-uitzending '...en een dikke zoen van de juffrouw' van 12 november 1971 bijvoorbeeld, werd dit criterium aangelegd voor de invoering van vereenvoudigde spelling. Hoeveel situaties beheerst men niet door foutloos te kunnen schrijven? (sollicitatiebrieven)
Een nadere uitwerking van dit criterium kunt u ook vinden in een artikel van Prof. Dr. A. van der Sluis 'Computerkunde in het AVO' (Euclides 46 (1970-1971), blz. 81):
.... voorbereiden op a het leven in de wereld van morgen
b het werken in de wereld van morgen
c verdere studie.

Hierbij zal men zich, in het algemeen voortgezet onderwijs meer nog dan in het beroepsonderwijs, bewust moeten zijn dat b gericht dient te zijn op het aanbrengen van algemene bekwaamheden, meer dan op snel verouderende specifieke kennis. De nadruk valt daarom, ook in het geciteerde artikel, op een vierde aspekt:

d de vormende waarde.

Voor de toepassing hiervan op het onderwijs in computerkunde ontlenen we aan Van der Sluis nog het volgende.

Ad a Routinematige geestelijke arbeid wordt overgenomen door machines, een nieuwe kracht in onze samenleving. Computers in de hand te houden zal een belangrijk taak zijn van deze generatie.

Ad b De taken die door mensen moeten worden vervuld verschuiven aanzienlijk.

Ad c Reeds in de nabije toekomst zullen er slechts weinig studierichtingen zijn, waarin men niet met de computer in aanraking komt.

Ad d De vormende waarde van het leren werken met een computer kan nauwelijks onderschat worden. Het kweekt namelijk het vermogen aan om processen nauwkeurig te beschrijven (algoritmiek), om niveaus van complexheid te onderscheiden en schijnbaar verschillende zaken onder één noemer te brengen (organisatie) en om kennis en informatie geschikt te maken om mee te werken (operationele vaardigheid).

4.3 *Het experiment computerkunde*

Bij dit experiment heeft men zich ten doel gesteld om te onderzoeken in hoeverre expliciet geformuleerde leerdoelen in het voortgezet onderwijs te verwezenlijken zijn met de beschikbare leerboeken en middelen en om te bepalen hoeveel lesuren hiervoor nodig zijn. Het experiment wordt in dit cursusjaar uitgevoerd op 104 scholen, te weten:
75 scholen voor vwo en havo, 10 mavo-scholen en 19 scholen voor beroepsonderwijs (lts, mts, hts, leao, meao en tuinbouwschool). Het betreft in totaal 4500 leerlingen.
De leerstof mondt uit in praktisch werken met vereenvoudigde voorbeelden van werkelijk computergebruik, zoals een girodienst, een personeelsadministratie en het simuleren van processen. De stof vereist geen specifieke wiskundige voorkennis.

Er wordt gebruik gemaakt van ECOL (Educational COmputer Language), een eenvoudige probleemgerichte taal, die niet toegespitst is op efficiënt machinegebruik. Een leerling die fouten maakt tegen de taal zal van de machine een duidelijk Nederlands gestelde foutmelding terugontvangen. De leerlingenprogramma's worden opgestuurd naar en verwerkt in een rekencentrum, waarna resultaten weer teruggestuurd worden. De lage kosten die deze wijze van verwerking met zich meebrengt, vergoeden ruimschoots het feit, dat men in het algemeen 3 tot 6 dagen op de retourzending moet wachten. Bij deze methode kan van elke leerling verlangd worden om tijdens een les één of

meer programma's in te leveren. Deze programma's worden door de leerlingen aangegeven op kaarten, gecodeerd in potloodstreepjes. De verwerking vindt volledig automatisch plaats.

Hoewel de computerkunde op dit moment als apart leervak los van de wiskunde wordt gedoceerd, gaat in verband met de aan de wiskunde verwante denkwijze de voorkeur waar mogelijk uit naar de wiskundeleraar als docent. Begeleiding vanuit het IOWO vindt plaats middels een contactblad 'Computerkunde IOWO' (oplage 260, 10 afleveringen per cursusjaar), contactvergaderingen en een docentenboek (uitgave IOWO).
Heroriënteringscursussen vinden plaats vanaf 1967, op dit moment één voor derde-graads leraren op 10 cursusplaatsen en één voor eerste- en tweedegraads docenten te Utrecht. Van de laatste vindt u hieronder een bladzijde uit de gebruikte tekst.

52.

Als tweede voorbeeld van het FUN-mechanisme gaan we een programma schrijven, waarin het grootste element van een rij via een FUN wordt bepaald.

```
     FUN max rij (n,RIJ r)                (1)
     m := r(1)                            (2)
     MET 1,i := 2,n
     ALS r(i) ≤ m DAN 1
     m := r(i)
1    HERHAAL                              (3)
     FUN := m                             (4)

     START                                         (19.2)
     p := LEES
     q := LEES
     RIJ(1:p)piet
     RIJ(1:q)wim
     MET 1,i := 1,p
     piet(i) := LEES
     HERHAAL
     s := max rij(p,piet)                 (5)
     wim := BESTAND( )
     SCHRIJF := s + max rij(q,wim)        (6)
     KLAAR

  +5+200+4.1-3.3-0.51+4.05+3.9
```

Toelichting:

1. De FUN-beschrijving wordt hier gevormd door de opdrachten (1) t/m (4). In de FUN-kop worden met de FUN-naam *max rij* twee formelen *n* en *r* meegegeven, gescheiden door een komma en waarvan de formele *r* door het voorvoegen van het hoofdletterwoord RIJ een formele rijnaam is.

2. In opdracht (5) wordt de FUN *max rij* aangeroepen met de aktuelen *p* en *piet*. In de aanroep *max rij* (*p*,*piet*) moet *piet* een rijnaam zijn, omdat op de overeenkomstige plaats in de FUN-kop een formele rijnaam is gegeven. De FUN-beschrijving wordt dan doorlopen met de aktuelen *p* en *piet* in plaats van de formelen *n* en *r*. Opdracht (5) heeft de uitvoering van het volgende programmadeel tot gevolg:

```
                            ⎧   m := piet(1)
                            ⎪   MET 1,i := 2,p
s := max rij (p,piet)  ⟺   ⎨   ALS piet(i) ≤ m DAN 1
                            ⎪   m := piet(i)
                            ⎪1  HERHAAL
                            ⎩   s := m
```

Aan het eind van het cursusjaar 1970-1971 hebben de deelnemende docenten een vragenlijst ingevuld. Aan de beantwoording ontlenen we de volgende conclusies.
Binnen de beperkingen door het experiment gesteld, bleek de inhoud van het leervak redelijk goed te kunnen worden overgedragen op de leerlingen.
Het vak biedt mogelijkheden tot verschillende presentaties, zoals klassegesprek, het laten werken in kleine groepjes leerlingen en individueel onderwijs.
Door 15% van de docenten werd bij de leerlingen een betere aanpak van problemen geconstateerd, te danken aan de lessen computerkunde, slechts 3% constateerde een duidelijke en zakelijke wijze van uitdrukken door de leerlingen, 30% constateerde verbetering in het stipt navolgen van een algoritme, 12% zag verbetering in netheid, 24% nam bij de leerlingen een toegenomen onderscheidingsvermogen waar tussen routine-aspecten en creatieve aspecten. Tenslotte meende 79% van de leraren dat inzicht in de rol van de computer in de samenleving bij hun leerlingen was ontstaan.
Bij 78% van de docenten zagen de leerlingen het nut van het leervak in.
84% van de docenten achtte algemene invoering van het leervak bij het avo wenselijk en wel gedurende één jaar, twee wekelijkse lesuren.

4.4 *Leerplan van de hogere informatica-opleiding*

In 4.2 werd op grond van de criteria a t/m d het belang van het vak computerkunde bij het algemeen vormend onderwijs besproken. Gelden deze kriteria op dezelfde grond voor de invoer van informatica bij het hoger beroepsonderwijs of zijn er duidelijk verschillen aan te wijzen? Zonder hier diepgaand op in te gaan kunnen toch wel enige graduele verschillen worden aangegeven.

Het algemeen voortgezet onderwijs zal minder specifieke kennis behoeven over te dragen dan het beroepsonderwijs, omdat dit laatste de leerlingen tenslotte voor een bepaald type beroep opleidt. Hierdoor zal criterium b een wat zwaarder accent krijgen. Criterium c daarentegen zal voor het hbo waarschijnlijk minder zwaar gaan wegen, omdat dit onderwijs meer op de maatschappij en het bedrijfsleven is gericht dan op verdergaande studie bij het hoger onderwijs.
De vormende waarde (criterium d) krijgt ook bij het beroepsonderwijs een steeds zwaarder accent, omdat alles in de maatschappij zo snel verandert, dat de capaciteit om nieuwe ontwikkelingen te kunnen verwerken ook voor het bedrijfsleven van fundamenteel belang wordt.

Op het gebied van de informatica zijn drie leerplancommissies door de WIHBO ingesteld. Eén leerplancommissie voor het leervak informatica bij het hto, één met dezelfde opdracht voor het heao en één commissie voor het ontwikkelen van een totaal leerplan voor een nieuw type onderwijs: de hogere informatica-opleiding (hio).
In april 1971 werd door deze laatste een interimrapport gepubliceerd, 'Leerplan

voor een hogere informatica-opleiding' (interimrapport over de eerste twee studiejaren), CMLW 1971, dat de inhoud voor de eerste twee studiejaren van de vierjarige studie aangeeft.
Men koos voor dit nieuw type onderwijs omdat de opleiding van deskundigen op het gebied van de harde software (dit is het gehele gebied tussen hardware (constructie van computers, etc.) en applicatiesoftware, moeilijk gezien kan worden als een afstudeerrichting bij het heao of hto.
De vakken die aan de hio onderwezen zullen worden naast de informatica zijn: wiskunde, bedrijfseconomie, algemene economie, talen en sport.
Als illustratie van het feit, dat de criteria a en d ook gehanteerd kunnen worden bij de keuze van de leerplaninhoud, volgt hier tot slot de overweging om bedrijfseconomie als vak op te nemen:

Dit vak is om verschillende redenen noodzakelijk. In de eerste plaats zal bij het ontbreken van bedrijfseconomie de basis van de meeste abituriënten te smal zijn voor een verdere carrière. In de tweede plaats is een behoorlijke kennis van administratie, organisatie en andere bedrijfskundige vakken van belang bij de specialisatie in het laatste jaar. Tenslotte is een rekencentrum zelf een bedrijfsorganisatorische eenheid met een zeer speciale bedrijfseconomische problematiek.

5 Leerplanontwikkeling in het voortgezet onderwijs

5.1 Na publikatie van een voorlopig, en later definitief *leerplan* voor mavo, havo, vwo—voorzien van een toelichting in C.M.L.W. publikatie nr. 4—is in de jaren zestig gestart met heroriëntering van de leraren in het vwo.

— voor het vwo	:	6, 5 en 3-daagse cursussen en middagcycli over de onderwerpen: logica, verzamelingen, lineaire analyse, groepentheorie, statistiek, computerkunde, topologie, discrete wiskunde.
— voor het mavo	:	middag- en avondcursussen over basisbegrippen van de wiskunde (verzamelingenleer, logica, structuren), statistiek en waarschijnlijkheidsrekening, computerkunde.
— voor het l/mbo	:	cursussen parallel met mavo; voornamelijk voor bezitters van akte wiskunde l.o. of N1.

Na vaststelling van een programma werd in het vwo door experimenten aan enkele scholen de *leerstof* nader uitgewerkt.

Ook in andere takken van voortgezet onderwijs kan niet zozeer van gestructureerd werken in dit opzicht gesproken worden.

5.2 Een summier programma, weliswaar voorzien van een toelichting, geeft gemakkelijk de verdere ontwikkeling van de leerstof in handen van auteurs van schoolboeken die dan op hun beurt weer in vrij sterke mate gericht worden door de eisen van een centraal eindexamen.
Waar, zoals in vele typen van beroepsonderwijs zo'n centraal examen ontbreekt en bovendien bij het bepalen van een schoolwerkplan een grote mate van vrijheid bestaat, zijn de voorwaarden voor een onoverzichtelijk geheel vrijwel compleet. Het wekt dan ook geen verwondering dat van enige planmatige uniformiteit van leerplannen binnen het beroepsonderwijs nauwelijks gesproken kan worden; ook al doordat van onderling overleg nauwelijks sprake is.

5.3 Proberen we nu te overzien welke groepen en instituten zich direkt of indirekt bezig houden met onderzoek of ontwikkeling van leerplannen voor het v.o. dan wordt voor een buitenstaander de indruk van chaotisch werken naar ons gevoel nog versterkt.

We noemen enige projecten, zonder volledig te willen zijn.
Wel moet vermeld worden, dat verschillende activiteiten van diverse groeperingen enigszins gecoördineerd plaats vinden.

- De Centrale Commissie Begeleiding Mavo Wiskunde (waarin participerend het Mavo-verband, de Pedagogische Centra en de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde) organiseert thema-dagen voor de (methode-gebonden) didactische begeleiding van mavo-leraren.
- De Nederlandse Vereniging van Wiskunde-Leraren vormt werkgroepen ter bestudering van doelstellingen, strategieën en hulpmiddelen.
- De Pedagogische Centra begeleiden experimenten en participeren in andere activiteiten.
- Het Research Instituut voor de Toegepaste Psychologie voert diverse onderzoekingen uit op fundamenteel gebied.
- De Vereniging van Middelbaar Technische Scholen organiseerde bijscholingscursussen.
- Het Genootschap tot Opleiding van Leraren voor het Beroepsonderwijs begeleidt cursussen voor technische leraren bij het mto, waarin heroriëntering t.a.v. wiskunde een belangrijk aspekt is.
- Uitgevers verzorgen onder meer door middel van werkgroepen bewerkingen van buitenlandse methoden.
- Het Instituut Ontwikkeling Wiskunde-Onderwijs heeft leerplanontwikkeling tot één van zijn voornaamste taken.
- Als we dan tot slot nog ongetwijfeld even waardevolle aktiviteiten vermelden van diverse regionale groeperingen van wiskundeleraren zal het de lezer duidelijk zijn, dat de inspanningen ten aanzien van leerplanontwikkeling voor het v.o. groot en velerlei zijn, maar dat het evenzeer moeilijk is in het geheel een lijn te ontdekken.

5.2 Dat een wat chaotisch aandoende situatie zoals hiervoor geschetst werd, kon ontstaan, is enerzijds waarschijnlijk een gevolg van het nog niet beschikbaar zijn van leerplantheorieën, anderzijds zal ook de structuur van het voortgezet onderwijs wel een deel van de onoverzichtelijkheid op zijn kerfstok hebben.
Vanzelfsprekend heeft de bovengeschetste ontwikkeling in het voortgezet onderwijs bijzonder *waardevolle gegevens* opgeleverd; uit diverse publikaties blijkt dat geleidelijk een beeld ontstaat van de behoeften en de mogelijkheden ten aanzien van leerplanontwikkeling.
Een dergelijk beeld zou als uitgangspunt kunnen dienen voor een meer gestructureerde aanpak.

5.3 Onder auspiciën van het IOWO en in het bijzonder dankzij initiatieven van de subcommissie L/MBO, zijn sinds kort enige *ontwikkelteams* bezig met voorbereidend onderzoek op het terrein van leerplanontwikkeling in het v.o., terwijl andere ontwikkelteams in oprichting zijn.

Deze ontwikkelteams beperken zich momenteel bewust tot de wiskunde-leerstof en mogelijke bijpassende didactische werkvormen die in relatie gebracht kunnen worden met de doelstellingen van hun specifieke onderwijstype. Het ontbreken van onmiddellijk bruikbare leerplantheorieën heeft hen er niet van kunnen weerhouden zich met enthousiasme in dit nieuwe avontuur te storten. Van een grote betrokkenheid bij de studie van de onderwijskundige fundamenten, die dit werk met zich meebrengt, getuigen reeds vele ervaringen op de bijeenkomsten van de wiskundeleraren uit het beroepsonderwijs en het mavo.
We menen te mogen stellen dat de tijd rijp is voor een gecoördineerde aanpak van de leerplanontwikkeling. Kadervorming van leraren, die bereid zijn zich ten volle voor deze specifieke onderwijstaak in te zetten, is een eerste schrede op een nog onbetreden pad. Het is te wensen dat vele collega's uit het voortgezet onderwijs de inmiddels door het IOWO geïnitieerde activiteiten in deze richting met raad en daad zullen steunen.

6 Wiskobas-Bulletin

De bedoelingen van de redactie met 'Wiskobas-Bulletin' — een periodiek dat gedurende de eerste jaargang vijf maal zal verschijnen — zijn:

— het verstrekken van informaties (informatieve functie) — pag 109;
— het stimuleren en bundelen van de inbreng van ieder die zich betrokken voelt bij het experiment(responsfunctie) — pag 179 en 180;
— het geven van materialen, ideetjes en achtergrondinformatie voor de onderwijspraktijk (begeleidende functie) — pag 235.

Het Bulletin richt zich op de deelnemers van de heroriënterings-cursussen en op de studenten aan pedagogische academies; het heeft echter binnen het experiment-Wiskobas geen op zichzelf staande pretenties. Het Bulletin is opgenomen in een totaalpakket, waarin tevens leerstofblokken, conferenties, cursussen, enz.
Om een indruk te geven van de wijze waarop deze bedoelingen in het Bulletin tot uitdrukking komen, zijn een viertal pagina's uit de eerste afleveringen opgenomen.

berichten uit het buitenland

KLAAS KOSTER

INTERNATIONALE STUDIEGROEPEN VOOR HET WISKUNDE-ONDERWIJS AAN JONGE KINDEREN

Sinds 1963 bestaat de International Study Group for Mathematics Learning. Deze studiegroep heeft vanaf 1964 regelmatig konferenties belegd of geïnitieerd. Onder de stuwende leiding van Z.P. Dienes vonden in 1964 en 1965 konferenties plaats in Stanford en Parijs. De weerslag van de konferenties treft men aan in een rapport van Dienes, dat in 1966 door het Unesco Institute te Hamburg is uitgegeven onder de titel: 'Mathematics in Primary Education'.
Dit rapport Dienes diende als basismateriaal voor de konferentie in januari 1966 te Hamburg.

Van deze konferentie verscheen in 1967 een verslag, uitgegeven door het Unesco Institute in Hamburg en geschreven door John D. Williams, in die tijd stafmedewerker van de National Foundation for Educational Research (NFER) in Londen. Onder voorzitterschap van Dienes vond in november 1967 een tweede Unesco-konferentie plaats te Hamburg. De bedoeling van deze tweede konferentie was om de mogelijkheid na te gaan een soort handleiding voor leerkrachten te schrijven. Deze handleiding moest een serie suggesties bevatten, hoe men 'kreatieve en motiverende wiskundige leersituaties in de basisschool' kan scheppen. Een en ander is uitgelopen op het voorstel om zo'n boek met suggesties inderdaad te schrijven en er is zelfs een globale taakverdeling gemaakt. Williams, Dienes, Papy, Rosenbloom (Columbia University – U.S.A.) en Maslova (Moskou) verzorgen ieder een hoofdstuk . . . .
Hoewel medio 1969 de verwachting was dat het boek binnen een jaar in de handel zou verschijnen, laat de publikatie, voor zover bekend, nog op zich wachten. Maar het is wel iets om attent op te zijn.

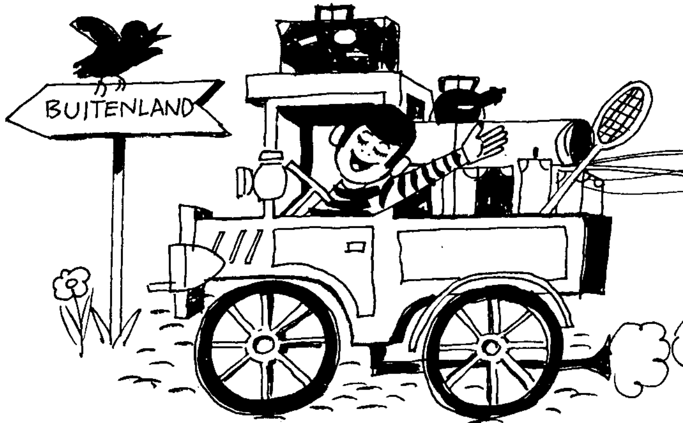
Het sekretariaat van de 'International Study Group for Mathematics Learning' is gevestigd in het Centrum voor Research in Psychomathematiek te Sherbrooke (Quebec) Canada (dir. Z.P. Dienes; opgericht in oktober 1967 als een zelfstandige afdeling van de Universiteit van Sherbrooke). De I.S.G.M.L. geeft op nogal ongeregelde tijden een tijdschrift uit, waarin onderzoek of ervaringen van studiegroepen worden beschreven, terwijl men er eveneens veel konferentieverslagen in aantreft. Van 1963–1967 heette het tijdschrift 'The Bulletin of the International Study Group for Mathematics Learning'. In 1968 werd de naam gewijzigd in 'Journal of Structural Learning'. Met deze naamsverandering is tevens de onderwerpenlijst van de artikelen uitgebreid naar andere gebieden dan wiskunde-onderwijs. Onderzoek naar 'het leren van strukturen' omvat ook het leren van bv. taalkundige strukturen. Met name is men geïnteresseerd in de relatie tussen wiskundige en taalkundige strukturen.

100 *Na de schooltijd ging ieder zijns weegs. '2' kreeg een mooie positie bij de posterijen.*

vakantie

WAARHEEN MET VAKANTIE?

Gaan we naar het buitenland of blijven we in Nederland?



Wat je nodig hebt:

Atlas van Europa
Atlas van Nederland
Stempel van de kaart van Europa (staatkundig)
    of een kaart van Europa
Stempel van de kaart van Nederland
    of een kaartje van Nederland
Papier
Pen en potlood
Lineaal
Gum
Kleurtjes of viltstiften.

Dit is werk voor een groep van: 

Zorg steeds voor een goede werkverdeling.

(Draai de kaart maar om)



1 Maak voor ieder kind van jullie klas het volgende lijstje met vragen:
   a Ben je deze zomer met vakantie geweest?
   b Zo ja, naar welk land?
   c Als je in Nederland bent gebleven naar welke provincie en welke plaats ging je?
   Vraag aan elk klasgenootje of je het lijstje ingevuld terug krijgt. Vul het zelf ook in.

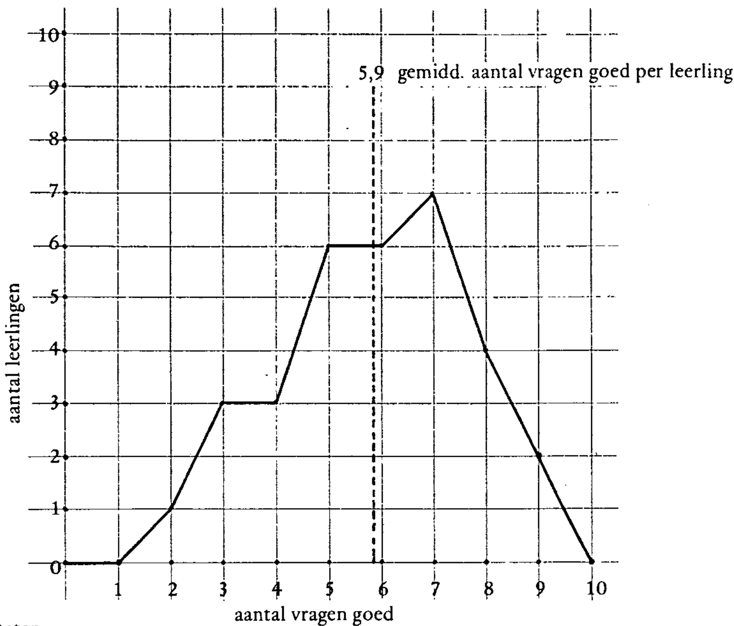
2 a Maak met het stempel een afdruk van de kaart van Europa, of neem het kaartje van Europa. Kleur de landen die door de kinderen uit jullie klas bezocht zijn.
   Gebruik de antwoorden op vraag b en je atlas.
   b Welke landen werden bezocht? Maak een lijstje.
   c Welk van de landen uit vraag 2b ligt het verst van Nederland? Meet van grens tot grens.
   d Welk van de landen uit vraag b grenst aan Nederland?
   e Noem eens twee landen die niet bezocht zijn.

3 Maak met het stempel een afdruk van de kaart van Nederland, of neem het kaartje van Nederland. Kleur de provincies, die door de kinderen uit je klas bezocht zijn.
   Gebruik de atlas en de antwoorden op vraag c (van nr. 1). Teken ook de plaatsen, die bij vraag c genoemd zijn, op de kaart.

4 a Maak een staafgrafiek van de antwoorden op vraag 2b van het vragenlijstje.
   b Welk land is het meest bezocht?
   c Welk land is het minst bezocht?

5 a Maak een staafgrafiek van de antwoorden op vraag c van het vragenlijstje.
   Alleen de provincies!
   b Welke verschillende provincies zijn bezocht en welke hoofdsteden hebben ze?
   Gebruik je atlas!
   c Welke provincie is het meest bezocht?
   d Welke provincie is het minst bezocht?
   e Zijn er ook provincies, die helemaal niet zijn bezocht? Zo ja, welke?
   f Arnhem is de hoofdstad van de provincie . . .
   Zijn er ook kinderen die in hun eigen provincie gebleven zijn? Zo ja, hoeveel?
   g Probeer de plaatsen, die je kreeg als antwoord op vraag c in groepen te verdelen. Eén groep is b.v.: badplaatsen. Bedenk voor de andere groepen ook een naam.
   Denk erom: het zijn vakantieplaatsen.
   h Probeer te bedenken waarom de provincies uit het antwoord op vraag 5b bezocht zijn.

6 Maak een kort verslagje van alles wat jullie ontdekt hebben. Bespreek eerst in de groep, wat in deze samenvatting zou moeten komen



Toetsresultaten

Samenvatting

Wat de lessen over het Stadsplan in het algemeen betreft: kleine stapjes vooruit geven de beste leerresultaten; veelvuldige herhaling en extra-oefening lijken me vereist voor een goede integratie.
Ook al zijn de praktische mogelijkheden nog maar zeer magertjes uit te buiten; als afwisseling in het dagelijkse doen en voor het vormen van een logische denkwijze is het Stadsplan een heerlijke materie.

Wanneer u de voorgaande beschrijving goed gelezen heeft, dan zult u ongetwijfeld waardering kunnen opbrengen voor de wijze waarop in de St.Odulphusschool gewerkt is. Ook al is de les nog lang niet vlekkeloos en is op talrijke punten kritiek te leveren, toch menen wij dat het geheel zeer aanvaardbaar is. In de andere leerjaren van de St.Odulphusschool zijn eveneens diverse Stadsplan-aktiviteiten ontwikkeld. Aktiviteiten waar vaak goede ideeën achter zitten. Zo is in één van de lagere klassen de vloer van het handenarbeid-lokaal 'gestoffeerd' met behangpapier; hierop is vervolgens een Stadsplan getekend. De leerlingen kunnen nu zelf door straten en lanen wandelen.

Uit Sittard kregen we ook een paar leuke Stadsplanlessen - tjokvol suggesties - toegestuurd. We hopen hieraan in een volgende aflevering aandacht te kunnen besteden.

Graag zouden wij van u aanvullingen op- en aanmerkingen over de lessen in Oirschot ontvangen. M.n. ervaringen in de klas zijn bizonder welkom. Wilt u ze zenden naar Gerard Willemen, St.Jozefstraat 48b, Tilburg?
Hij zal een en ander sorteren, bewerken en een kort verslag schrijven.

7 Nationale Brainstorm

1 In hoofdstuk 2 van dit nummer van Euclides hebben wij u o.m. een beschrijving gegeven van de taak die het IOWO zich stelt: leerplanontwikkeling-moderne-stijl. In hoofdstuk 3 hebben wij u geconfronteerd met een nulde fase uit dat proces: een onderwerp.
Fundamenteel in het leerplanontwikkelingsproces is de respons uit het veld. Niet alleen en niet zozeer de respons achteraf op het voldongen, over te dragen eindprodukt, als wel de respons tijdens de ontwerp- en besprekingsfase is naar onze mening van fundamenteel belang voor het onderwijs.

Het zal dan ook duidelijk zijn dat wij de hier geboden kans om zovele docenten en overige betrokkenen reeds in een dermate vroeg stadium te raadplegen, niet graag laten voorbijgaan.

2 Onder punt 4 hebben wij een aantal vragen gesteld die voor ons medebepalend zijn bij het vervolg van de ontwikkeling.
Ze dragen het karakter van 'spontane opborrelingen', van een wat ongeordende brainstorm.

De vragen zijn bedoeld om een reactie op te roepen.
Wij hopen dan ook dat - in eerste instantie - zeer vele leraren, vanuit het besef dat leerplanontwikkeling vooral ook *hun* zaak is, aan ons verzoek om respons voldoen.

Echter, pasklare vragen, waarop men slechts met ja of nee hoeft te antwoorden kunnen wij u in dit stadium van de strijd niet aanbieden.
Integendeel, wilt u aan deze 'NATIONALE BRAINSTORM' deel nemen, dan moet u (minstens) er even voor gaan zitten

Er zijn dan diverse mogelijkheden:

a U kunt bij elke vraag een korte, spontane opmerking plaatsen
b U kunt op één specifieke vraag wat dieper ingaan
c U kunt een aspect van een vraag beantwoorden
d U kunt enig andere vraag aan de orde stellen, die u relevant vindt of
e U stelt òns vragen.

De enige respons die wij niet zouden waarderen is: géén respons.
Te lang is leerplanontwikkeling een kwestie van de enkeling geweest; hopelijk participeren van nu af zeer vele betrokkenen in dit karwei!

Bijzonder op prijs stellen wij het uiteraard als u een of meerdere bakens in de praktijk wilt uitproberen, waarna u ons (het liefst zo gedocumenteerd mogelijk) uw bevindingen toestuurt.
Waar wij nauwelijks op durven hopen is dat u zelf een baken produceert (en al dan niet uitgebreid uitgewerkt en/of beproeft)!

3 Alvorens de vraagstelling in te leiden vermelden wij u nog hoe wij ons voorstellen nader te reageren op uw respons.

a voorjaar 1972: enquête en mondelinge interviews; uitproberen van enkele bakens

b midden 1972: verwerking enquêtes; verdere uitwerking leerplanontwikkeling statistiek rapportage

c eind 1972: colloquium - belangstellenden worden uitgenodigd om met ons van gedachten te wisselen over de op dat moment beschikbare gegevens

Tenslotte: wilt u bij uw reactie uw naam, adres, beroep en achtergrond (studie) vermelden?
Dit alleen om eventueel in nader contact met u te treden.

4 *Vragen*

4.1 Inleiding

Het uiteindelijke doel van leerplanontwikkeling (statistiek) is een 'bron' samen te stellen van waaruit de school een keuze kan maken voor zijn specifieke werkplan.
Niet alleen het *wat* is daarbij van belang (de leerstof), maar vooral ook het *hoe* (de didactische vormgeving), de leermaterialen, de technologie en het *waarom* (doelstelling, uitgangssituatie, evaluatie, alsmede leer- en ontwikkelingspsychologische uitgangspunten).
Een denkbaar startpunt voor leerplanontwikkeling is de vakstructuur, die adekwaat vertaald wordt naar een leerplanstructuur.
De procedure die wij binnen dit onderwerp kozen is die van de 'bakens': oriëntatiepunten bij het uitzetten van het leerplantrajekt van 5 - 18. Oriëntatiepunten die voor de leerlingen zekere mijlpalen vormen in de ontwikkeling van zijn 'statistisch denken', zijn kennis en vaardigheden.
Men kan de bakens in deze zin vergelijken met de oriëntatiepunten die men zich stelt bij het uitzetten van een route voor een autotocht.
Daarbij kan men denken aan fundamentele bakens in de grofstructuur:

'Amsterdam-Breda-Antwerpen-Gent-Lille-Parijs, etc.' en aan bakens in de fijnstruktuur: 'in Parijs nemen we de boulevard périphérique en volgen de borden A3'.

Aan ons nu de taak om deze bakens uit te zetten en te beproeven, maar vooral ook de mogelijke verbindingsroutes te bepalen.

In het ontwikkelingsstadium plegen we daartoe mede-overleg met u: straks de gidsen op de af te leggen route: welke bakens acht u fundamenteel, welke tussenwegen wilt u uitzetten, welke informatiebronnen (inzichten, kennis, vaardigheden) moet de 'automobilist' tot zijn beschikking hebben, hoe moet de weg afgelegd worden voor bepaalde 'rijders' (snel, recht op het doel af, of toeristisch: kalm aan, langs binnenwegen); etc., etc.

4.2 Vragen:

Welke op- en of aanmerkingen, suggesties, aanvullingen, uitwerkingen, ervaringen, prijzende of vernietigende kommentaren wilt u geven, met name t.a.v. de volgende aspekten?

1 *LEERPLAN:*

a Bent u van mening dat een leerplan (-wiskunde) zich dient te beperken tot leerstofomschrijving en -ordening, waarbij schoolboekauteurs de uitwerking verzorgen?
of

b Gaat u akkoord met het denkbeeld dat een leerplan ('schoolwerkplan') een complete verzameling moet zijn van onderwijs-leerpakketten (teksten, werkvormen, leer- en toetsingsmaterialen, etc.) voor leraar en leerling.

c Welke taak ziet u voor het I.O.W.O. in dit verband (en welke taak voor andere instellingen?).

2 *BAKENS en LEERPLANONTWIKKELING (-moderne-stijl)*

a Acht u het 'uitzetten van bakens' een adekwate (wenselijk, nuttig, reëel, etc.) start voor (longitudinale)* leerplanontwikkeling (in de zin van vraag 1b).

b Welke suggesties wilt u doen voor uitwerking:
— verdere routebepaling en -beschrijving
— doelstellingsformulering, toetsing
— ontwerp, ontwikkeling
— onderzoek (empirisch/fundamenteel)
— inbreng uit het veld
— problemen van overdracht (heroriëntering/begeleiding)
— produktie van onderwijs-leermaterialen

* longitudinale l.o.:
ontwikkeling van een leerplan 5-18, rekeninghoudend met eisen van differentiatie naar aanleg, tempo en vervolgonderwijs.

3 *ONDERWIJSORGANISATIE*

a Biedt een baken — georiënteerde leerplanontwikkeling (al dan niet) perspectieven voor moderne inzichten van onderwijs — organisatie, zoals vakkenintegratie, niveau- en tempo-differentiatie, differentiatie naar opleidings-(vormings-)doel, sociale vorming, democratisering.

b Welke problemen betreffende klasse-organisatie kunnen zich voordoen bij 'baken-onderwijs'. Ziet u een oplossing?

4 *PSYCHOLOGIE/DIDACTIEK*

a Herkent u in de beschrijving van de bakens inzichten van leer- en ontwikkelingspsychologie?

b Ontmoet u in de (beschreven) bakens een onderwijsaanpak, waarmee u zich (al dan niet) kunt verenigen?

5 *DOELSTELLING (FORMULERING) / 'BEGINSITUATIE'*

a *Algemeen:*
Weerspiegelt de vormgeving van de (beschreven) bakens (al dan niet) algemene doelstellingen van het wiskunde (statistiek) onderwijs, die voor u waardevol zijn? Zo ja, welke (niet)?

b *Speciaal:*
Heeft u doelstellingsformulering bij ieder beschreven baken voor u (al dan niet) betekenis gehad ter beoordeling van inhoud, werkvorm, gewenst leergedrag?

c Bood de formulering van de beginsituatie u adekwate informatie?

d Bent u het eens met de stellingname dat een baken z'n uitgangspunt dient te vinden in een te mathematiseren, concrete probleemsituatie?

6 *FUNDAMENTELE VRAGEN*

Kunt u een antwoord formuleren op de volgende fundamentele vragen:
Wat *is* in feite mathematiseren; wat *is* 'statistisch denken'?
Wat *is* 'inzicht' (in statistische werkwijze(n), bv.)?
Wat *is* een ontdekkende werkwijze?

7 *PRAKTIJK*

a Bent u bereid een (of meerdere) van de beschreven bakens in de praktijk uit te proberen en ons (zo mogelijk zo volledig mogelijk gedocumenteerd) uw bevindingen mee te delen.

b Bent u bereid in een verder stadium aan een experiment deel te nemen.

8 *AANVULLENDE BAKENS en FUNDAMENTELE BEGRIPPEN*

a De aangeboden verzameling bakens is zeker niet kompleet. Welke bakens binnen het S & W-onderwijs wilt u hieraan toevoegen, voor welke groep/niveau leerlingen?
(titels en/of schema's en/of uitwerking!)

b Welke fundamentele (statistische) begrippen, technieken, vaardigheden heeft u in de beschreven bakens node gemist? (groep/niveau).

c Wilt u eens (op intuïtieve gronden) formuleren welke eisen u stelt t.a.v. parate kennis van Waarschijnlijk en Statistiek bij leerlingen uit de categorieën basisonderwijs ($\leqq$ 11 jaar), lager en middelbaarberoepsonderwijs (lto/leao; mto/meao; mavo/havo/vwo).

d Bent u van mening dat een baken – georiënteerde leerplanontwikkeling voldoende recht zal doen aan fundamentele eisen voor wiskunde-(statistiek)-onderwijs?

9 *OPLEIDING*
Welke eisen wilt u stellen t.a.v. de opleiding (heroriëntering) van onderwijzers/leraren (3e/2e/1e-graad) ter voorbereiding op te geven statistiekonderwijs.
(vakinhoudelijk, methodisch/didactisch, onderwijskundig, etc.).

10 *TENSLOTTE*
Welke (essentiële) vragen mist u in deze lijst (en eventueel aan wie te stellen)?

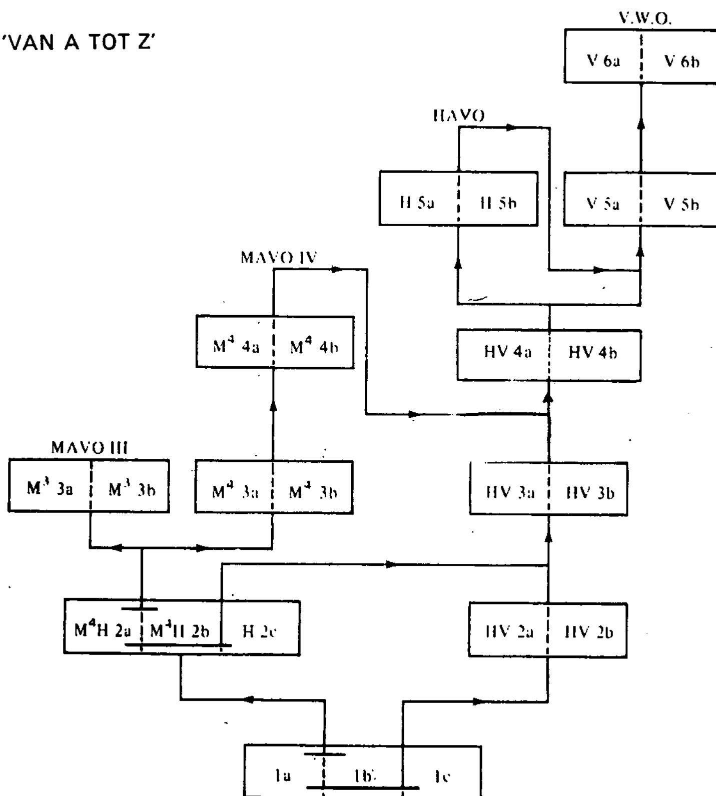
Wij zien uw op- en of aanmerkingen, suggesties aanvullingen, uitwerkingen enz. Gaarne tegemoet. U kent ons adres: IOWO (t.a.v. F. Goffree), Tiberdreef 4, Utrecht-Overvecht.

van *a* tot z

werkboek der wiskunde voor mavo door:
Drs. Chr. Boermeester, B. Burger, Dr. P. M. van Hiele

werkboek der wiskunde voor havo-vwo door:
Dr. P. M. van Hiele, Ir. K. Kok, H. N. Schuring

Schema 'VAN A TOT Z'



Herziening brugklasdelen

Naast de bestaande delen voor de brugklas verschijnen tijdig voor het komende schooljaar de herziene uitgaven, waarbij rekening is gehouden met vele wensen en adviezen van docenten.
Uitgangspunten zijn:

a. het uitdunnen van de stof benevens de nodige verschuivingen.
b. een strakker verband tussen de hoofdstukken.
c. een functioneel gebruik maken van kleur.

Eigen werkboeken voor het lto

Nu leverbaar het brugklasdeel 'Van A tot Z voor lto'
door J. A. Hartman en Dr. P. M. van Hiele.